



John Warner

Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen.

Herausgegeben
von
Dr. A. L. Crelle,
Königlich Preußischem Ober-Baurathe.

Erster Band.

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin, 1821.
In der Maurerschen Buchhandlung.

Vorrede.

Diese Sammlung wird über mathematische Gegenstände Bemerkungen enthalten, welche entweder

Erstlich, in andern Büchern, so viel dem Herausgeber bekannt, noch nicht gemacht sind, oder welche

Zweitens, zwar in andern Büchern vorkommen, aber wenig bekannt sind, oder

Drittens, zwar bekannte Sätze enthalten, aber irgend eine andere Ansicht derselben darbieten.

Wegen der Bemerkungen der ersten Art und der Ansichten der dritten erinnert der Verfasser ausdrücklich, daß er beide, obgleich sie ihm neu sind, keinesweges für wirklich neu hält. Von Allem, was aus andern Büchern genommen, oder zu dem beabsichteten Zweck gebraucht worden, sind die Quellen auf das Sorgfältigste angegeben. Auf dasjenige, bei welchem keine Quellen angezeigt sind, ist der Verfasser selbst gekommen. Er wird aber mit Dank annehmen, wenn man ihm nachweiset, wo solches schon angetroffen werde, um solche frühere Ideen mit den seinigen zu vergleichen. Bemerkungen der zweiten Art hat der Verfasser aufgenommen, weil oft in manchem nicht sehr bekannten mathematischen Buche Vortreffliches enthalten ist, welches mit dem Buche in Vergessenheit geräth, und weil gute mathematische Ideen nicht genug in Umlauf gesetzt werden können.

Die Aufsätze in dieser Sammlung werden sich nicht auf einen besondern Theil der Mathe-

matik, auch nicht auf die reine Mathematik allein beschränken, sondern zuweilen auch über Gegenstände verbreiten, auf welche blos mathematische Sätze angewandt werden.

Eine Verbindung zwischen den Aufsätzen wird nicht weiter Statt finden, als daß nur spätere, wo es nöthig ist, auf vorhergehende sich beziehen, nicht umgekehrt. Weil in den, auf den siebenten Aufsatz folgenden, Abhandlungen die sogenannte Differential- und Integral-Rechnung gebraucht wird, in jenem siebenten Aufsatz aber der Verfasser Einiges über diese Rechnung mitgetheilt hat, worauf sich hernach die folgenden Aufsätze beziehen, so würde derjenige, welcher etwa die Aufsätze nicht nach der Reihe, sondern zerstreut lesen will, wenigstens den siebenten Aufsatz zuerst lesen müssen.

So wenig in dieser Sammlung die Aufsätze von einerlei Art sind, oder einerlei Zweck und Gegenstand haben, so wenig hat sie der Verfasser für eine einzelne Klasse von Lesern bestimmt. Wer

die Mathematik weiter ergründet hat, wird vielleicht hier und da einen Gedanken finden, den er der Bemerkung werth hält. Denjenigen, welchem die Mathematik mehr Hülfswissenschaft ist, werden diejenigen Dinge und Ansichten interessiren, die weniger bekannt sind, und der Anfänger wird entweder Manches in den Aufsätzen finden, was er noch nicht kannte, oder es wird ihm hie und da Einiges leichter scheinen, was ihm sonst schwer wurde, denn der Verfasser hat sich bei der gegenwärtigen und allen seinen andern kleinen mathematischen Arbeiten immer zugleich den Zweck vorgesetzt, das Schwere leichter und das Höhere elementar machen zu helfen, damit die Wissenschaft, dieses Gemeingut aller Menschen, immer mehr jedem zugänglich werden möge.

Daß der Verfasser überhaupt die Sammlung dem Druck übergiebt, glaubt er, wenigstens gegen sich selbst, entschuldigen zu können, weil er sich dabei der reinsten Absicht bewußt ist. Er hat bei der Bekanntmachung durchaus keinen Zweck für sich

selbst, sondern einzig und allein denjenigen, für die Wissenschaft zu nützen, wo und wie es in seinen Kräften ist.

Daß er aber seine Bemerkungen in der Form zerstreuter Aufsätze mittheilt, die man gewöhnlich nur von bewährten Kennern nicht ungern aufnimmt, glaubt er, um den Schein abzuwenden, als lege er auf seine mathematischen Einsichten oder Arbeiten einen zu großen Werth, noch besonders entschuldigen zu müssen. Gäbe es nämlich in deutscher Sprache eine Zeitschrift für die Mathematik, wie sie früher existirte und jetzt noch in französischer Sprache da ist, für deren Form zerstreute Aufsätze passen, so würde er seine Bemerkungen in eine solche Zeitschrift niedergelegt haben. Da aber die Gelegenheit mangelt und die Aufsätze eben nicht deshalb ungedruckt bleiben mußten, weil es keine deutsche mathematische Zeitschrift giebt, außerdem aber der Verfasser seine Aufsätze gern nur in deutscher Sprache mittheilen wollte, weil die französische Zeitschrift von Deutschredenden nicht allgemein genug gelesen wird, so blieb ihm

nichts übrig, als die Bemerkungen zu sammeln und für sich bekannt zu machen.

Finden dieselben einige Theilnahme, so wird sie der Verfasser fortsetzen und von Zeit zu Zeit ein neues Bändchen erscheinen lassen.

Berlin, im Junius 1820.

A. L. Crelle.

Inhalt
des ersten Bandes.

I.

Ueber die Analyse der geraden Linien und Ebenen im Raume.

1.

Die Methode, gerade Linien und Ebenen im Raume durch Gleichungen auszudrücken, ist bekanntlich bei der Untersuchung ihrer Lage gegen einander, der Körper, die von Ebenen umschlossen sind, der krummen Flächen und der krummen Linien im Raume; ferner, in der Mechanik u. s. w., von großem Nutzen. Die Theorie der geraden Linien und Ebenen, die von diesen Gleichungen ausgeht, ist der erste Abschnitt der Theorie der geometrischen Zeichnung oder der Grund = und Aufrisse der beschreibenden Geometrie (géometrie descriptive). Man gelangt analytisch, durch die Gleichungen der Flächen und Linien, auf eine leichte und elegante Weise zu den verwickeltesten geometrischen Sätzen, und die Methode ist, wie überall die analytische, ganz geeignet, um in der Geometrie weiter fortzuschreiten und neue Sätze zu finden.

Die Arbeiten von Euler, Lagrange und vorzüglich von Monge lassen hier zwar, was die Allgemeinheit betrifft, kaum etwas zu wünschen übrig, allein wegen ihrer Abstraction sind die Sätze noch wenig elementar, auch kann vielleicht Manches noch einfacher und übersichtlicher gegeben werden. So z. B. ist bei den gewöhnlichen Bezeichnungen nicht jeden Augenblick die Bedeutung der Coefficienten in den Gleichungen deutlich, und weil nicht alle Glieder dieser Gleichungen gleich viel Abmessungen haben, verlieren sie an Symmetrie. Die möglichste Symmetrie ist aber für die Rechnung wichtig, weil man Ausdrücken, die nach den verschiedenen Lagen der Figuren verschiedene Formen

haben können, durch die bloße Versetzung der Buchstaben alle Gestalten, deren sie fähig sind, geben kann, ohne daß es nöthig wäre, die Rechnung zu wiederholen, welches bei unsymmetrischen Ausdrücken nicht angeht. Die Entstehung der Gleichungen aus der ersten einfachen Betrachtung der Figur scheint sich auch einfacher nachweisen zu lassen. Je einfacher aber die Ableitung ist, und je regelmäßiger die Formeln sind, von welchen man ausgeht, je leichter kommt man mit denselben weiter. Ja, die Regelmäßigkeit der Formeln ist, nach einer Bemerkung, die irgendwo Euler gemacht hat, selbst ein Kennzeichen ihrer Richtigkeit.

Da nun über die Analyse der Ebenen und geraden Linien in deutschen Büchern noch wenig vorkommt, so mag dieselbe hier einigen Raum finden.

Der Darstellung der Grundlehren sollen einige Anwendungen folgen.

Von dem Punkte in der Ebene und im Raume.

2.

Die Lage eines Punktes im Raume ist bestimmt, wenn man seine Entfernung von drei willkürlichen, nicht mit einander parallelen Ebenen kennt, die man, der Einfachheit wegen, auf einander senkrecht annehmen kann, so daß sie die körperliche Ecke eines Würfels oder Cubus von unbestimmter Ausdehnung bilden. Für einen Punkt, der in einer gegebenen Ebene liegt, sind schon die Entfernungen desselben von zwei auf einander senkrechten geraden Linien, die also die Schenkel eines rechten Winkels bilden, hinreichend.

Man nennt die Entfernungen in beiden Fällen, **Coordinaten**, die festen Ebenen, im ersten Falle **Coordinaten-Ebenen**, die geraden Linien, in welchen die Coordinaten-Ebenen sich durchschneiden, **Coordinaten-Axen** und den Punkt, in welchem sich die Axen oder die Coordinaten-Ebenen schneiden, **Anfangs-Punkt der Coordinaten**. Bei Linien in

der Ebene kommen nur Axen und der Anfangs-Punkt der Coordinaten vor. Werden die Entfernungen durch x, y, z bezeichnet, so heißt diejenige Axe, welche mit x parallel ist, Axe der x, die Axe, welche mit y parallel ist, Axe der y, die mit z parallele Axe, Axe der z. Die Ebene, welche mit x und y zugleich parallel ist, Ebene der xy, die mit y, z parallele Ebene, Ebene der yz, und die mit x, z parallele Ebene, Ebene der xz.

Für einen Punkt in der Ebene kommt nur die Axe der x und y vor.

Um die Vorstellung noch deutlicher zu machen, kann man sich die Ebene der xy für Punkte im Raum, und die Axe der x für Punkte in der Ebene wagerecht vorstellen. Dann stehen die Ebenen der xz und der xy, sammt der Axe der z, für erstere, und die Axe der y für letztere, lothrecht.

Von den Linien und Flächen.

3.

Da man sich in der ganzen Ausdehnung einer Linie oder Fläche, wo man will, Punkte vorstellen kann, die Entfernungen dieser verschiedenen Punkte aber von festen Coordinaten-Ebenen, oder von festen Coordinaten-Axen, weil sie unmittelbar oder stetig auf einander folgen, nach irgend einem Gesetze, welches der Natur der Ebene oder Linie gemäß ist, von einander abhängen müssen, so daß z. B., wenn die Entfernung eines Punkts von der einen Ebene oder Axe eine gewisse Größe mehr beträgt, als die eines anderen Punkts, seine Entfernung von der andern Ebene oder Axe ebenfalls nach einem gewissen Gesetze größer oder geringer seyn muß, als die des andern Punkts: so ist klar, daß die Ebene oder Linie, worin die verschiedenen Punkte liegen, durch jenes Gesetz der Abhängigkeit der Entfernungen ihrer Punkte von den festen Coordinaten-Ebenen oder Axen, also durch das Gesetz der Abhängigkeit ihrer Coordinaten von einander müssen bestimmt werden können. Die Gleichungen, welche dieses Gesetz ausdrücken, nennt man Gleichungen der Li-

nien oder Flächen, worin die verschiedenen Punkte liegen, und es ist offenbar, daß diese Gleichungen die Lage aller Punkte ohne Ausnahme, die je in der Ebene oder Linie gedacht werden können, bezeichnen, weil von allen das Verhältniß der Entfernung demselben Gesetz unterworfen ist. Diese Gleichungen der Linien und Ebenen sind solche, die man in der Algebra unbestimmte nennt, weil sie für alle mögliche Punkte in der Ebene oder Fläche passen.

Die Gleichungen der Linien in der Ebene sind von der Form $f(xy) = o$, weil nur zwei Coordinaten vorkommen, diejenigen der Flächen im Raume von der Form $f(xyz) = o$, weil hier drei Coordinaten nöthig sind. Die Linien im Raume können, wie sich späterhin, hier wenigstens für die geraden Linien, zeigen wird, allemal durch drei Gleichungen von der Form $f(xy) = o$, $\varphi(xz) = o$, $F(yz) = o$ ausgedrückt werden, von welchen aber je zwei schon die dritte enthalten. In allen diesen Gleichungen ist der Werth, wenigstens einer der drei Größen, völlig willkürlich. Bei der Fläche im Raum sind es deren zwei. Sind dieselben aber angenommen worden, so ist die übrige Größe nicht mehr willkürlich, sondern hat nothwendig den Werth, der ihr, vermöge der Gleichung, oder, was dasselbe ist, vermöge der Natur der Linie oder Fläche, die sie ausdrückt, zukommt. Denn die Linie oder Fläche ist in der That nichts anders, als die nach einem gewissen Gesetze sich richtende stetige Aufeinanderfolge der Punkte.

4.

Will man einen bestimmten Punkt in einer Linie oder Fläche bezeichnen, so darf man nur seine Coordinaten nennen, von welchen allemal eine, vermöge der Gleichungen, von den übrigen abhängt, oder durch die übrigen gegeben ist. Man kann also einen Punkt geradezu durch seine Coordinaten bezeichnen, z. B. den Punkt im Raume, dessen Coordinaten p, q und r sind, schlechtweg durch (p, q, r) den Punkt in der Ebene, dessen Coordinaten p q sind, durch (p, q). Dergleichen Bezeichnungen sind abkürzend und folglich nützlich; denn in der Kürze des Ausdrucks liegt die Stärke der neuern Analyse. Die

ganze Algebra ist nichts anders, als die Kunst, durch einzelne Zeichen Begriffe auszudrücken und mit einander zu verbinden, zu deren Darstellung sonst eine Reihe von Worten gehören würde.

Die eben erwähnte Bezeichnung erfordert, daß man den Anfangs-Punkt der Coordinaten, Punkt o, nenne, denn dieser Anfangs-Punkt ist derjenige, dessen Coordinaten o sind. Auf diese Weise kann man manches Wort ersparen, welches die Vorstellung nur aufhält und beschwert.

5.

In gleicher Absicht kann man eine Fläche oder Linie blos durch ihre Gleichungen bezeichnen, und z. B. unter: Fläche $f(xyz) = o$ die Fläche verstehen, deren Gleichung $f(xyz) = o$ ist, unter: Linie $f(xy) = o$, die Linie in der Ebene, deren Gleichung $f(xy) = o$, unter: Linie $f(xy) = o$, $\varphi(yz) = o$, $F(xz) = o$, die Linie im Raume, deren Gleichungen $f(xy) = o$, $\varphi(yz) = o$ und $F(xz) = o$ sind. Auch diese Bezeichnung kürzt den Ausdruck ab und macht ihn bestimmter.

6.

Die Gleichungen von Ebenen und Linien können bekanntlich unendlich verschiedene Formen haben. Jede Gleichung zwischen zwei oder drei unbestimmten Größen drückt eine Linie oder Fläche aus, also gibt es Linien und Flächen von unzählig verschiedener Gestalt.

Die Aufgabe ist doppelter Art: aus der Gleichung die Gestalt der Linie oder Fläche, oder aus dieser jene zu finden. Die Gleichung kann willkürlich angenommen, oder irgend sonst woher algebraisch gegeben seyn, und man kann aus ihr die Gestalt der Linie oder Fläche suchen. Umgekehrt kann man aus der Gestalt der Linie oder Fläche ihre Gleichung suchen. So kann man z. B. die Linie suchen, die von der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ ausgedrückt wird. Sie ist ein Kreis, dessen Halbmesser $= a$. Oder man kann umgekehrt aus irgend einer der

Eigenschaften des Kreises seine Gleichung suchen; alsdann findet man die vorige.

7.

Geht man von den Gleichungen aus, so ist die natürlichste Eintheilung derselben, die nach den Abmessungen der veränderlichen Größen. Dieser veränderlichen Größen können nie mehr als drei seyn. Man nennt Gleichungen, in welchen die veränderlichen Größen nur in der ersten Abmessung vorkommen, wie $ax + by + cz + d^2 = o$, Gleichungen des ersten Grades; kommen sie bis zu zwei Abmessungen vor, wie $ax^2 + by^2 + cky + c^2x + f^2y + gxy + h^3 = o$, Gleichungen des zweiten Grades u. s. w. Bekanntlich drücken die Gleichungen des ersten Grades gerade Linien und Ebenen, die des zweiten Grades die Durchschnitte von Ebenen mit der Fläche eines Kegels und solche Flächen aus, deren Durchschnitte mit Ebenen überall Kegelschnitte sind u. s. w.

8.

Geht man von den geometrischen Eigenschaften der Linien und Flächen aus und sucht die Gleichungen, so scheint die natürlichste Eintheilung die, in gerade und krumme zu seyn. Linien und Flächen der zweiten Art zerfallen wieder in viele andere.

Hier soll nur die Rede seyn von den Linien und Flächen der ersten Art, nämlich von den geraden Linien und den Ebenen.

9.

Von den Gleichungen der geraden Linien in einer Ebene, und den Ebenen.

A. Die Gestalt der Linien und Ebenen aus den Gleichungen.

Geht man von den Gleichungen aus, so ist zu zeigen, daß die Gleichungen $ax + by + c^2 = o$ und $ax + by + cz + c^2 = o$ nur grade Linien und Ebenen und keine andern Linien und Flächen ausdrücken können, das heißt, daß alle Punkte, für deren Entfernungen von den Coordinaten=Axen und

Ebenen jene Gleichungen Statt finden, nur in einer und derselben Linie und Ebene liegen können.

Fig. 1. I. Man bringe die erste Gleichung $ax + by + c^2 = 0$ auf die Form $y = -\frac{c^2}{b} - \frac{a}{b}x$ und setze $-\frac{c^2}{b} = \beta$, $-\frac{a}{b} = \alpha$, so daß $y = \alpha x + \beta$, so ist β die Entfernung AB, in welcher die Linie, welche die gegebene Gleichung ausdrückt, die Axe der y schneidet, denn aus der Gleichung $y = \alpha x + \beta$ folgt $y = \beta$ für $x = 0$, also ist β die Ordinate AB, die der Abscisse x zukommt. Nun folgt aus der Gleichung $y = \alpha x + \beta$, $\frac{y - \beta}{x} = \alpha$, $y - \beta$ aber ist $= MD$, $x = BD$, folglich ist $\frac{MD}{BD}$ eine beständige Größe α, das heißt, eine Größe, die für alle x und y die nämliche ist.

Dieser Quotient $\frac{MD}{BD}$ drückt aber die trigonometrische Tangente des Winkels MBD aus, welchen eine, durch zwei Punkte der Linie M und B gezogene gerade Linie mit der Abscissen-Axe macht. Also haben alle jene geraden Linien einerlei Neigung gegen die Abscissen-Axe und fallen folglich mit einander, und mithin mit der Linie selbst, welche von der Gleichung ausgedrückt wird, zusammen. Mithin ist diese Linie eine gerade und kann keine andere seyn.

Fig. 2. II. Um zu zeigen, daß die Gleichung $ax + by + cz + e^2 = 0$ eine Ebene ausdrücke, bringe man sie auf die Form $z + \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + \frac{e^2}{c} = 0$ und setze $-\frac{a}{c} = \alpha$, $-\frac{b}{c} = \beta$, $-\frac{e^2}{c} = \gamma$, so daß

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Nun nehme man in der Ebene der xy irgendwo eine gerade Linie DE an, die mit der Axe der xy, oder einer ihr parallel gezogenen Linie DF, einen Winkel φ macht, dessen trigonometrische Tangente $= m$ ist, so ist, wenn die Coordinaten dieser

Linie DE, x und y, und diejenigen des Punkts D, $=p$ und q sind, $y-q=m(x-p)$. Ueber der geraden Linie DE nehme man eine senkrecht stehende Ebene an, so wird dieselbe die gesuchte Fläche $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ in irgend einer Linie schneiden. Die Punkte dieser Durchschnitts-Linie werden eben sowohl von der Gleichung der Fläche ausgedrückt werden, als alle andere. Für einen zu den Coordinaten x, y und z gehörigen, in dieser Linie liegenden Punkt ist $z=\alpha x+\beta y+\gamma$, für den Punkt D′ senkrecht über D, der ebenfalls in der Linie liegt, und dessen dritte Coordinate r seyn soll, ist $r=\alpha p+\beta q+\gamma$. Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt $z-r=\alpha(z-p)+\beta(y-q)$. Es war aber oben $y-q=m(x-p)$, also ist $z-r=(\alpha+\beta m)(x-p)$. Nun nehme man von dem Punkt (x, y, z) eine gerade Linie nach dem Punkt über D gezogen an, so macht diese Linie mit der Ebene der x, y einen Winkel, dessen Tangente gleich der Höhe des Punkts xyz über den Punkt pqr, dividirt durch die Länge DM gleich ist. Die Höhe ist $z-r$, die Länge DM ist $\sqrt{((y-q)^2+(x-p)^2)}$ $=\sqrt{(m^2(x-p)^2+(x-p)^2)}=(x-p)\sqrt{(1+m^2)}$, also ist die Tangente des Winkels jener geraden Linie mit der Ebene der xy,

$=\frac{z-r}{(x-p)\sqrt{(1+m^2)}}$ Es war aber $z-r=(\alpha+\beta m)(x-p)$,

also ist die Tangente $=\frac{\alpha+\beta m}{\sqrt{(1+m^2)}}$, folglich eine beständige Größe. Mithin würde jede gerade Linie, die man aus irgend einem Punkte derjenigen, in welcher die über DE senkrechte Ebene die gesuchte Fläche $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ schneidet, nach dem Punkt über D ziehen kann, dieselbe Neigung gegen die Ebene der xy haben. Alle die geraden Linien werden folglich, da sie obendrein in einer und derselben Ebene, nämlich in der senkrechten Ebene über DE liegen, in einer und derselben geraden Linie zusammen fallen, woraus folgt, daß der Durchschnitt der über DE senkrechten Ebene mit der Fläche $\alpha x+\beta y+\gamma=z$ eine gerade Linie ist. Die Linie DE aber war ganz willkürlich, also ist der Durchschnitt jeder beliebigen, auf die Ebene der xy senkrechten Ebene, mit der Fläche $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ eine gerade

Linie. Da nun dieses das Kennzeichen der Ebenen ist, so kann die Gleichung $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ oder $ax + by + cz + e^2 = 0$ nur eine Ebene und nichts anders ausdrücken.

10.

B. Gleichungen der geraden Linie in der Ebene, und der Ebene selbst aus ihrer Gestalt.

Wenn umgekehrt die Gleichung aus der Figur statt, wie bisher, die Figur aus der Gleichung gesucht werden soll, so scheint der kürzeste Weg folgender:

Fig. 3. I. Es sey XY eine gerade Linie in der Ebene, von welcher die Gleichung verlangt wird. AX soll die Axe der x, AY die Axe der y seyn. Die Entfernungen der Durchschnitts-Punkte X und Y der gegebenen Linie und der Axen vom Punkt o sollen a und b seyn. Q sey ein beliebiger Punkt in der Linie XY, dessen Coordinaten x und y sind, so ist der Inhalt des Dreiecks $AQX = \frac{1}{2} ay$, der Inhalt des Dreiecks $AQY = \frac{1}{2} bx$ und der Inhalt des ganzen Dreiecks $AXY = \frac{1}{2} ab$. Die beiden ersten Dreiecke aber sind zusammen dem dritten gleich, also ist

$$1.\quad ay + bx = ab,$$

und dieses ist die verlangte Gleichung der geraden Linie xy; nämlich die Gleichung, die zwischen den Entfernungen jedes beliebigen Punkts in ihr von den Coordinaten-Axen und den beständigen Entfernungen ihrer Durchschnitte mit den Coordinaten-Axen, von dem Punkte o, Statt findet.

In dieser Gleichung haben die Coefficienten eine bestimmte Bedeutung, die Glieder der Gleichung aber haben gleiche Abmessungen, welches in der sonst gewöhnlichen Form nicht der Fall ist. Man kann der Gleichung, wenn man sie mit ab dividirt, auch die Gestalt

$$2.\quad \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

geben, oder auch die Gestalten

$$3.\quad y + \frac{b}{a} x = b, \text{ oder } x + \frac{a}{b} y = a.$$

In dieser letzten Form drücken die Coefficienten von x in (3) und von y in (3), wie leicht zu sehen, die trigonometrischen Tangenten der Winkel aus, welche die gegebene gerade Linie mit den Axen der x und der y machet und es folgt umgekehrt $y = b$ für $x = 0$ aus (3) und $x = a$ für $y = 0$ aus (3), wie gehörig. Nennt man die Tangenten der Winkel, die die Linie mit den Axen macht, k und m, so ist $\frac{b}{a} = k$, $\frac{a}{b} = m$ und die Gleichungen sind

$$4.\ y + kx = b \text{ und } x + my = a.$$

Weil $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$, so ist allemal

$$5.\ k \cdot m = 1.$$

In der Gestalt (1 und 2) hat die Gleichung nur eine einzige Form, denn wenn man die Buchstaben weiter rückt, kommt man immer auf das Nämliche, z. B. $ay + bx = ab$ gibt weiter gerückt $bx + ay = ba$, welches das Nämliche ist. Hingegen in der Gestalt (3. und 4.) hat sie die oben angegebene zweifache Form. Die eine drückt sowohl die Linie aus, als die andere.

Es ist kaum zu bemerken nöthig, daß die Gleichung unverändert für jede mögliche Lage der Linie gegen die Axen paßt. Es kommt nur darauf an, daß man genau beobachtet, ob a und b positiv oder negativ sind. Nämlich vom Punkt o aus gehen a und b immer nach der rechten Hand und nach oben zu. Alle a also, die linker Hand der Axe der y, und alle b, die unter der Axe der x liegen, sind negativ. Hätte z. B. die Linie x y die Lage Fig. 4., so wäre b positiv, a negativ. In Figur 5. wäre a positiv und b negativ, und in Figur 6. beides, a und b negativ. Eben so sind alle x, die links von der Axe der y liegen, und alle y, die unter der Axe der x liegen, negativ.

II. Es werden die Gleichungen einer Ebene verlangt, die die Axen der x, y und z in den Entfernungen a, b und c von dem Punkt o schneidet.

Hier möge zuerst, und zwar ein = für allemal, wegen der Zeichnung der Figuren im Raume oder der Körper bemerkt werden, daß solche nie perspectivisch seyn, sondern daß die Figur auf dem Papiere allemal die Projection des Körpers auf der Ebene

des Blattes oder dasjenige darstellen wird, was man gemeinhin den Grundriß des Körpers nennt; die über das Papier erhöht liegenden Punkte des Körpers aber werden durch die nämlichen Buchstaben bezeichnet werden, die bei ihren, senkrecht unter ihnen liegenden Projectionen stehen, jedoch, um sie von ihren Projectionen zu unterscheiden, ein, zwei und mehrere Mal accentuirt, je nachdem einer über dem anderen liegt. Man trifft zuweilen, selbst in mathematischen Lehrbüchern, perspectivische Zeichnungen an, ehe von der Perspective ein Begriff gegeben worden. Sind diese Zeichnungen schattirt, so wird die praktische Vorstellungskraft des Beschauers in Anspruch genommen, und es läßt sich noch denken, daß derselbe durch die Zeichnung die Vorstellung dessen, was sie darstellen soll, erhält. Aber oft fehlen nicht allein die Schatten, sondern die Zeichnungen sind obendrein noch so wenig richtig perspectivisch, daß selbst der geübte Leser Mühe hat, sich darin zu finden. Dergleichen Zeichnungen erschweren dann den Vortrag, statt ihn zu erläutern und gehören zu den Widersprüchen, die der Mathematik fremd seyn sollten. Der bloße Grundriß oder die Projection auf eine Ebene reicht in den meisten Fällen zu einer deutlichen Vorstellung von dem Körper hin. Ist die Figur verwickelter, so kann die Projection auf eine zweite, auf den Horizont senkrechte Ebene, die dann wieder das Papier vorstellt, oder gar noch die Projection auf eine dritte, auf die beiden vorigen senkrechte Ebene, hinzukommen, wie es in der descriptiven Geometrie Gebrauch ist.

Fig. 7. Hier also ist von einer schiefen Ebene die Rede, die die Axen der x, y und z in den Entfernungen $AX = a$, $AY = b$ in $AA' = c$ von dem Punkt o, schneidet. M′ sey ein beliebiger Punkt in dieser Ebene, dessen Coordinaten $AP = QM = x$, $PM = AQ = y$ und $MM' = z$ sind. $M'A$ sey eine gerade Linie von M′ nach A. Durch diese Linie und die Axen der x, y und z sollen drei Ebenen $AM'X$ $AM'Y$ und $AM'A'$ gelegt seyn, die sämmtlich die gegebene Ebene XYA' schneiden, so wird die Pyramide $AXYA'$ dadurch in drei andere getheilt, deren Inhalt zusammen dem der ganzen Pyramide gleich ist. Der Inhalt der Pyramide $AA'XM'$ ist $= \frac{1}{6}acy$, derjenige der Pyramide $AA'YM'$ ist $\frac{1}{6}bcy$ und der Inhalt der Py-

ramide AXYM' ist $\frac{1}{6}abz$. Der Inhalt der ganzen Pyramide AXYA' hingegen ist $\frac{1}{6}abc$, also ist

$$6.\quad bcx + cay + abz = abc,$$

und dieses ist die verlangte Gleichung der Ebene, nämlich wiederum die Gleichung, die zwischen den Entfernungen jedes beliebigen Punktes in der Ebene von den Coordinaten-Ebenen und den constanten Entfernungen des Punktes o von den Durchschnitten der Ebene mit den Axen Statt findet.

Auch in dieser Gleichung haben die Coefficienten der Coordinaten eine bestimmte Bedeutung und die Glieder haben sämmtlich gleiche Abmessungen, welches in der gewöhnlichen Form nicht der Fall ist.

Man kann wieder nach Belieben den Gleichungen der Ebene verschiedene Gestalten geben, z. B. wenn man sie mit a, b, c dividirt, die Gestalt

$$7.\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

welches die sonst öfters gewöhnliche Form

$Ax + By + Cz = 1$ ist, deren Coefficienten A, B, C also die Bedeutungen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ haben.

Will man die eine oder die andere der drei Coordinaten absondern, so dividire man die Gleichung mit ihrem Coefficienten, welches folgende Formen der Gleichung gibt:

$$8.\quad \begin{cases} x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = a \\ y + \frac{b}{c}z + \frac{b}{a}x = b \\ z + \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y = c. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Quotienten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{c}$ durch k, m, n, so bekommen die Gleichungen der Ebene die Gestalt:

$$9.\quad \begin{cases} x+\frac{y}{k}+nz=a \\ y+\frac{z}{m}+kx=b \\ z+\frac{x}{n}+my=c. \end{cases}$$

In der Form 6. und 7. ist die Gleichung der Ebene nur einfach, in der Gestalt 8. und 9. dreifach. Aber durch bloßes Weiterrücken der Buchstaben findet man die dreierlei Gestalten der Gleichungen eine aus der andern.

Vor der Hand werde bemerkt, daß, weil $\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$,

$$10.\quad kmn=1$$

ist. Die Bedeutung der Größen k, m, n in der Figur kommt weiter unten (§. 30.) vor. Daß alle diese Gleichungen die Ebene ausdrücken, welche Lage sie auch immer gegen die Coordinaten-Ebene haben mag, und daß es nur darauf ankomme, Acht zu haben, ob die Entfernungen a, b, c ihrer Durchschnitts-Punkte mit den Axen vom Punkt o, positiv oder negativ sind, ist klar. Alle a und x, die rechter Hand der Axe der y, alle b und y, die über der Axe der x, und alle c und z, die über der Ebene des Papiers liegen, sind positiv, die, welche die entgegengesetzte Lage haben, negativ.

11.

Man kann noch auf mancherlei Art die Gleichungen der geraden Linien und Ebenen finden. Eine von den sinnreicheren ist die, welche, Lacroix zufolge, von Fourrier herrührt. Zieht man nämlich auf die gegebene gerade Linie oder Ebene eine andere gerade Linie senkrecht, so sind zwei beliebige Punkte in der letzteren, wenn sie von der gegebenen Linie oder Ebene gleich weit abstehen, auch von allen übrigen Punkten der gegebenen Linie oder Ebene gleich weit entfernt. Diesen Satz könnte man sogar zur Definition der geraden Linien und Ebenen machen. Dadurch würde der Begriff von Entfernung oder Länge, zum Grundbegriff in der Geometrie, und der Begriff des

Winkels, sey es der nach Euklid, als Neigung zweier Linien, oder nach Bertrand, als Theile des unbegränzten Ebenen-Raums, würde entbehrlich werden. Es ist die Frage, ob man nicht gar auf diesem Wege zu einer recht klaren Theorie der Parallelen gelangen könnte; nur scheint der Satz zur ersten Definition nicht einfach genug, wenigstens nicht einfacher, als das berühmte eilfte Axiom oder Postulat des Euklides.

Hier läßt sich der Satz folgendergestalt benutzen. Die Entwickelung mag hier stehen, weil sie nicht sehr bekannt ist. Man nimmt nämlich,

I. um die Gleichung der geraden Linie zu finden, zwei beliebige Punkte in der auf sie perpendiculären geraden Linie an. Die Coordinaten derselben sollen p, q und p′, q′ seyn. Die Coordinaten eines beliebigen Punkts der gegebenen Linie sollen x, y seyn, so ist offenbar die Entfernung des Punkts p, q vom Punkte x, y

$$=\sqrt{((x-p)^2+(y-q)^2)},$$

und die Entfernung des andern Punkts p′, q′ vom Punkte x, y

$$=\sqrt{((x-p')^2+(y-q')^2)}.$$

Beide sind nach dem Grundsatze einander gleich, was auch x und y seyn mögen; also ist

$$\sqrt{((x-p)^2+(y-q)^2)}=\sqrt{((x-p')^2+(y-q')^2)}$$

oder $x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2$

$$=x^2-2p'x+p'^2+y^2-2q'y+q'^2 \text{ oder}$$

$$11.\ (p'-p)x+(q'-q)y=\tfrac{1}{2}(p'^2-p^2+q'^2-q^2).$$

Diese Gleichung hat schon die Gestalt der obigen Gleichung der graden Linie, denn sie enthält x und y nur in einer Abmessung. Legt man nun von den beiden Punkten pq und p′q′, die willkürlich sind, z. B. den letzten, in den Punkt o, so ist $p'=0$ und $q'=0$ und aus der Gleichung 11. folgt:

$$\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)=px+qy.$$

Die Größe p^2+q^2 ist das Quadrat der Entfernung des Punktes pq vom Punkte o; heißt diese 2P, so ist

$$4P^2=p^2+q^2.$$

Nun geht die gegebene Linie mitten zwischen den Punkt o und pq durch, also ist die Entfernung der gegebenen Linie vom Punkt o, $=P$. Diese Entfernung ist aber das Perpendikel aus

dem Punkt o auf die gegebene Linie, also ist das Quadrat desselben $P = \frac{1}{4}(p^2 + q^2)$ und folglich

12. $2P^2 = px + qy.$

Nennt man nun die Coordinaten des Durchschnitts-Punktes des Perpendikels und der gegebenen Linie α und β, so ist offenbar $p = 2\alpha$, $q = 2\beta$, also $2P^2 = 2\alpha x + 2\beta q$ oder

13. $P^2 = \alpha x + \beta y,$

welche Gleichung der geraden Linie der obigen (11.) ganz ähnlich und merkwürdig genug ist, weil ihre Coefficienten von der Lage und Länge des Perpendikels aus dem Punkt o auf die gegebene Linie herrühren.

Die Gleichung läßt sich auch leicht aus der obigen (1.) ableiten, denn es sey $AQ = P$ das Perpendikel auf die gegebene Linie XY (Fig. 8.), so daß die Dreiecke AQS, ARQ und AYX ähnlich sind, so ist $\frac{\alpha}{P} = \frac{P}{a}$ also $\frac{\alpha}{P^2} = \frac{1}{a}.$ Eben so ist $\frac{\beta}{P} = \frac{P}{b}$, also $\frac{\beta}{P^2} = \frac{1}{b}.$ Dieses in die Gleichung (2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ gesetzt, gibt $\frac{\alpha x}{P^2} + \frac{\beta y}{P^2} = 1$ oder $\alpha x + \beta y = P^2$, wie (13.)

II. Um auf die nämliche Art die Gleichung einer Ebene zu finden, lege man wieder eine beliebige gerade Linie auf sie senkrecht, und nehme in derselben zwei Punkte zu beiden Seiten der Ebene an, die von ihr gleichweit auf der einen und der andern Seite abstehen. Die Coordinaten der beiden Punkte sollen p, q, r und p′, q′, r′ heißen. Sind nun die Coordinaten eines beliebigen Punkts in der Ebene x, y, z, so ist die Entfernung dieses beliebigen Punkts von dem Punkte p, q, r

$$= \sqrt{((x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2)}$$

und die Entfernungen des nämlichen Punktes x, y, z von dem Punkte p′, q′, r′

$$= \sqrt{((x - p')^2 + (y - q')^2 + (z - r')^2)}$$

Beide sind nach dem Grundsatze einander gleich, also ist

$$\sqrt{((x - p')^2 + (y - q')^2 + (z - r')^2)}$$
$$= \sqrt{((x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2)} \text{ oder}$$
$$x^2 - 2p'x + p'^2 + y^2 - 2q'y + q'^2 + z^2 - 2r'z + r'^2$$
$$= x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 + z^2 - 2rz + r^2 \text{ oder}$$

$$14.\quad (p-p')x+(q-q')y+(r-r')z$$
$$=\tfrac{1}{2}(p^2-p'^2+q^2-q'^2+r^2-r'^2),$$

welche Gleichung schon der obigen für die Ebene ähnlich ist, weil sie x, y, z nur in einer Abmessung enthält.

Legt man nun wieder einen der beiden willkürlichen Punkte p, q, r und p', q', r', z. B. den letzten, in den Punkt o, so ist $p'=o$, $q'=o$, $r'=o$, und aus der Gleichung wird folgende:

$$15.\quad px+qy+rz=\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2).$$

Die Größe $p^2+q^2+r^2$ ist das Quadrat der Entfernung des Punkts o von dem Punkte p, q, r. Heißt dieselbe $2P$, so ist $4P^2=p^2+q^2+r^2$. Da nun aber die Ebene mitten zwischen dem Punkt o und p, q, r durchgeht, so ist sie um P von dem Punkte o entfernt. Diese Entfernung aber ist die Länge des Perpendikels aus dem Punkte o auf die Ebene, also ist das Quadrat desselben $P^2=\tfrac{1}{4}(p^2+q^2+r^2)$ und folglich

$$16.\quad 2P^2=px+qy+rz.$$

Nennt man die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts der gegebenen Ebene mit dem Perpendikel, α, β und γ, so ist $p=2\alpha$, $q=2\beta$, $r=2\gamma$, also $2P^2=2\alpha x+2\beta y+2\gamma z$, oder

$$17.\quad P^2=\alpha x+\beta y+\gamma z,$$

welche Gleichung der Ebene ebenfalls merkwürdig ist, weil ihre Coefficienten von der Lage und Länge des Perpendikels aus dem Punkte o auf die gegebene Ebene hergenommen sind.

Fig. 9. Auch sie läßt sich leicht aus der obigen Gleichung der Ebene (6. oder 7.) herleiten. Denn es sey M der Durchschnitt des Perpendikels aus dem Punkt o auf die Ebene, mit ihr, so daß $AS=\alpha$, $SM=\beta$, $MM=\gamma$ seine Coordinaten sind, so sind z. B. AM'X und ASM' ähnliche Dreiecke, denn sie sind bei M und S rechtwinkelig und haben den Winkel M'AS, den das Perpendikel AM mit der Axe AX macht, gemein, also ist $\frac{\alpha}{P}=\frac{P}{\alpha}$ oder $\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha}{P^2}$. Eben so ist für die

beiden andern Axen $\frac{1}{b}=\frac{\beta}{P}$, $\frac{1}{c}=\frac{\gamma}{P}$. Setzt man dieses in die obige Gleichung der Ebene (7.), die $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ist, so kommt

$$\frac{\alpha x}{P^2}+\frac{\beta y}{P^2}+\frac{\gamma z}{P^2}=1 \text{ oder}$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=P^2, \text{ wie } 17.$$

12.

Gleichungen der geraden Linie im Raume.

Bisher war von den Gleichungen der geraden Linie in der Ebene und von den Gleichungen der Ebene die Rede; diese letzten führen auf die Gleichungen der geraden Linien im Raume.

Zwei Ebenen nämlich schneiden sich allemal in einer geraden Linie, also ist eine gerade Linie im Raume gegeben, wenn es die zwei Ebenen sind, deren Durchschnitt sie ist, und die Gleichungen einer geraden Linie im Raume müssen sich aus den Gleichungen der beiden Ebenen finden lassen.

Die Gleichungen zweier Ebenen sollen seyn:

$$x+\frac{y}{k}+nz=a \text{ und}$$

$$x+\frac{y}{k'}+n'z=a';$$

so liegen in dem Durchschnitte dieser Ebenen alle die Punkte, die einerlei Coordinaten aus beiden Ebenen haben, oder für welche die x, y, z aus beiden Ebenen die nämlichen sind. Folglich werden die Gleichungen des Durchschnitts diejenigen seyn, die aus Verbindung der beiden Gleichungen der Ebenen entstehen, wenn man x, y und z in der einen so groß annimmt, als in der andern.

Haben nun x, y und z in beiden Gleichungen den nämlichen Werth, so läßt sich je eine dieser drei Größen zwischen den zwei Gleichungen wegschaffen, also lassen sich drei Glei-

chungen aufstellen, die jede nur zwei von den drei Größen enthalten. Zieht man nämlich eine Gleichung von der andern ab, so kommt

$$18.\quad \begin{cases} y\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k'}\right)+z(n-n')=a-a' \text{ oder} \\ y\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)+z\left(\frac{a}{c}-\frac{a'}{c'}\right)=a-a'. \end{cases}$$

Eben so findet man, wenn man zwischen den Gleichungen der beiden Ebenen, in der Gestalt $y+\frac{z}{m}+kx=b$ und

$$y+\frac{z}{m'}+k'x=b',$$

durch Subtraction, y weggeschafft,

$$19.\quad \begin{cases} z\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m'}\right)+x(k-k')=b-b' \text{ oder} \\ z\left(\frac{b}{c}-\frac{b'}{c'}\right)+x\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)=b-b', \end{cases}$$

und wenn man zwischen den Gleichungen der Ebenen in ihrer dritten Gestalt z wegschafft

$$20.\quad \begin{cases} x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)+y(m-m')=c-c' \text{ oder} \\ x\left(\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'}\right)+y\left(\frac{c}{b}-\frac{c'}{b'}\right)=c-c'. \end{cases}$$

Auch durch bloße Versetzung der Buchstaben könnten die Gleichungen (19. und 20.) aus der ersten Gleichung (18.) gefunden werden.

Diese drei Gleichungen sind diejenigen des Durchschnitts der beiden Ebenen, und folglich einer geraden Linie im Raume. Sie drücken die Verhältnisse aus zwischen den Entfernungen beliebiger Punkte des Durchschnitts der Ebenen, oder der geraden Linie im Raume von den Coordinaten-Ebenen.

Je zwei von diesen Gleichungen enthalten schon alle drei Coordinaten. Wenn also eine derselben einen bestimmten Werth hat, so sind die übrigen beiden durch zwei von den drei Gleichungen schon völlig bestimmt. Also ist die dritte Gleichung nicht mehr nöthig. Daraus folgt, daß je die dritte Gleichung

nichts Neues geben kann, was die andern beiden nicht schon ausdrückten, daß also je eine Gleichung in den beiden übrigen enthalten seyn muß. Dieses folgt noch deutlicher daraus, wenn man sich vorstellt, was die Gleichungen bedeuten. Die dritte z. B. ist eine Gleichung zwischen x und y, das heißt: sie bestimmt y, wenn man x annimmt, also bestimmt sie für ein gegebenes x die Lage aller Punkte, die in der Entfernung x von der Ebene der y, z, um y von der Ebene der x, z abstehen. Dergleichen Punkte aber liegen in einer, mit den beiden Ebenen der yz und xz parallelen, und um x von der ersten, um y von der andern entfernten geraden Linie, folglich bestimmt sie für jedes beliebige x eine solche gerade Linie. Alle diese geraden Linien stehen aber, weil sie mit den Ebenen der yz und xz parallel sind, auf der Ebene der xy senkrecht, und da die Gleichung alle Punkte derselben bestimmt, so bestimmt sie auch die Durchschnitts-Punkte jener geraden Linien mit der Ebene der yz. Daraus aber folgt, daß diese Durchschnitts-Punkte selbst in einer geraden Linie liegen, denn die Gleichung hat die Gestalt derjenigen einer geraden Linie in der Ebene. Also ist der Durchschnitt aller jener mit den Ebenen der yz und xz parallelen geraden Linien, mit der Ebene der xy, eine gerade Linie, folglich liegen sie alle zusammen in einer Ebene, die auf der dritten Ebene der xy senkrecht steht, und deren Durchschnitt mit dieser Ebene die Gleichung ebenfalls ausdrücken kann, wenn man sie auf jene Durchschnitts-Punkte insbesondere bezieht. Die dritte Gleichung (20.) drückt also eine Ebene aus, die auf der Ebene der xy senkrecht steht, folglich drückt jede der drei Gleichungen (18. 19. 20.) eine solche Ebene aus, nämlich die erste eine Ebene, die auf diejenige der yz, die zweite eine Ebene, die auf diejenige der zx, und die dritte, wie gesagt, eine Ebene, die auf diejenige der xy senkrecht ist. Offenbar aber reichen schon zwei solcher Ebenen zur Bestimmung ihres Durchschnitts hin, folglich kann nicht nur die dritte Gleichung immer nur eben das ausdrücken, was die beiden andern schon enthalten, sondern es folgt auch, daß die drei senkrechten Ebenen sich nothwendig in einer und derselben geraden Linien im Raume schneiden müssen, welche die nämliche ist, in welcher sich die zwei gegebenen Ebenen

begegnen, deren Gleichungen $x + \frac{y}{k} + nz = a$ und $x + \frac{y}{k'} + n'z = a'$ waren.

Auch durch Rechnung läßt sich zeigen, daß zwei von den drei Gleichungen allemal die dritte enthalten. Man bringe nämlich die drei Gleichungen auf folgende Gestalt:

$$ycc'(ab'-a'b) - zbb'(a'c-ac') = (a-a')bb'cc'$$
$$zaa'(bc'-b'c) - xcc'(b'a-ba') = (b-b')cc'aa'$$
$$xbb'(ca'-c'a) - yaa'(c'b-cb') = (c-c')aa'bb'$$

so kommt, wenn man zwischen den ersten beiden z wegschafft:

$$\left\{\begin{matrix} yaa'cc'(ab'-a'b)(bc'-b'c) \\ -xbb'cc'(b'a-ba')(a'c-ac') \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (a-a')(bc'-b'c) \\ (b-b')(a'c-ac') \end{matrix}\right\} aa'bb'cc$$

also

$$y = x\frac{bb'}{aa'}\frac{a'c-ac'}{bc'-b'c} + bb'\left(\frac{a-a'}{(ab'-a'b)} + \frac{(b-b')\ (a'c-ac')}{(ab'-a'b)(bc'-b'c)}\right)$$

Dieses Verhältniß zwischen x und y geben die beiden ersten Gleichungen; die dritte Gleichung giebt

$xbb'(a'c-ac') + yaa'(b'c-bc') = (c-c')aa'bb'$ oder

$$y = x\frac{bb'}{aa'}\frac{ca'-c'a}{c'b-cb'} - bb'\frac{c-c'}{c'b\ \ cb'},$$

Ist nun beides wirklich das Nämliche oder gibt die dritte Gleichung nichts Anders, als die beiden ersten, so daß sie schon in den beiden ersten enthalten ist, wie behauptet wird, so müssen auch die Coefficienten zu bb' im zweiten Theile gleich seyn, denn das Uebrige ist schon gleich. Es muß also

$$\frac{a-a'}{ab'-a'b} + \frac{(b-b')\ (a'c-ac')}{(ab'-a'b)(bc'-b'c)} = -\frac{c-c'}{c'b-cb'}$$

oder wenn man mit dem Nenner des zweiten Gliedes links, überall multiplicirt

$(a-a')(bc'-b'c) + (b-b')(a'c-ac') + (c-c')(ab'-a'b) = 0$

seyn. Dieses ist, wenn man die Multiplication verrichtet, wirklich der Fall, indem sich alle Glieder aufheben. Also ist die dritte Gleichung schon in den beiden ersten enthalten, und so jede in den beiden übrigen.

Man pflegt dieses auch so zu beweisen, daß man die erste der drei Gleichungen mit $aa'(c'b-bc')$, die zweite mit $bb'(a'c-ac')$, die dritte mit $cc'(b'a-ba')$ multiplicirt und Alles zusammen addirt. Dann hebt sich, wie leicht zu sehen, Alles linker Hand auf, und es kommt

$$o=(c'b-b'c)(a-a')aa'bb'cc'+(a'c-ac')(b-b')aa'bb'cc' \\ +(b'a-ba')(c-c')aa'bb'cc' \text{ oder}$$

$$(c'b-b'c)(a-a')+(a'c-ac')(b-b')+(b'a-ba')(c-c')=o$$

Da nun diese Größe linker Hand wirklich in sich selbst $=o$ ist, weil sich, wenn man die Multiplication verrichtet, alle Glieder aufheben, so folgt, daß die neue Gleichung keine Bedingung für das Verhältniß zwischen den Größen a, b, c, a', b', c' enthält. Daraus aber ist zu schließen, daß zwei Gleichungen der Linie die dritte enthalten; denn da sich durch das obige Verfahren die Größen x, y, z sämmtlich aus den drei Gleichungen wegschaffen lassen, so müßte man, wenn zwei Gleichungen nicht schon die dritte enthielten, sondern vielmehr alle drei für sich beständen, nothwendig eine Bedingung für das Verhältniß zwischen den Größen a, b, c, a', b', c' finden. Da nämlich die drei Gleichungen, was sie sonst könnten, die Größen x, y, z nicht geben, sondern alle drei Größen herausfallen, so müßten die Gleichungen, wenn sie von einander unabhängig wären, wenigstens ein Verhältniß der übrigen Größen geben. Da dies nun nicht der Fall ist, so können die Gleichungen nicht von einander unabhängig seyn, sondern je zwei müssen schon die übrige dritte enthalten. Dieser zweite Beweis scheint aber, was man beweisen will, nicht so klar zu zeigen, als der erste.

Auch daraus, daß sich unzählige verschiedene Ebenen in einer und derselben geraden Linie schneiden können, folgt, daß zwei völlig gegebene Ebenen mehr sind, als zur Bestimmung einer geraden Linie im Raume nöthig ist, und daß folglich die drei Gleichungen, welche sich aus den Gleichungen zweier Ebenen, für ihren Durchschnitt finden lassen, mehr seyn müssen, als die Bestimmung dieser Durchschnitte erfordert, daß also diese drei Gleichungen das Nämliche mehr als einmal ausdrücken müssen,

wie es auch wirklich der Fall ist, weil je zwei Gleichungen immer schon die dritte enthalten.

Man wähle unter den unzähligen Paaren von Ebenen, die sich in einer und derselben geraden Linie schneiden können, zwei solche, die auf zwei Coordinaten=Ebenen, z. B. auf die Ebene der xy und der xz, senkrecht stehen, so schneidet die erste dieser Ebenen die Axe der z, die andern die Axe der y gar nicht, folglich ist in den Gleichungen der Ebenen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$, in der ersten c, in der andern b unendlich groß. Das dritte Glied der ersten und das zweite Glied der zweiten Gleichung ist also $= 0$, und die Gleichungen dieser beiden Ebenen gehen in folgende über:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{z}{c'} = 1 \text{ oder}$$

$$bx + ay = ab \text{ und } c'x + a'z = a'c', \text{ oder}$$

$$x + \frac{y}{k} = a,\ x + n'z = a'$$

Diese zwei Gleichungen sind schon ohne Veränderung denen (18. 19. und 20.) gleich, denn sie enthalten nur zwei von den Coordinaten. Da nun dieselben die gerade Linie im Raume völlig bestimmen, so folgt, daß zwei der obigen Gleichungen (18. 19. und 20.) dazu ebenfalls hinreichen, und folglich immer schon die dritte einschließlich enthalten.

Auf diese Bemerkungen über die Gleichungen der geraden Linien in der Ebene, der Ebene und der geraden Linie im Raume mögen nun einige Verbindungen der Sätze und Anwendungen derselben folgen.

Von der geraden Linie in der Ebene.

13.

Die Gleichung der geraden Linie in der Ebene war

$$y + kx = b \text{ oder } x + my = a.$$

Hieraus folgt, daß die Gleichung einer geraden Linie, die durch den Punkt o geht:

$$21. \quad y + kx = 0 \text{ und } x + my = 0$$

ist, denn in diesem Falle sind b und a = o. In der Gestalt $ay + bx = ab$ ist die Gleichung der geraden Linie, wenn sie durch den Punkt o geht, nicht deutlich, weil in diesem Falle a und b zugleich o sind.

14.

Ist die Linie mit einer der Axen, z. B. mit der Axe der x parallel, so ist $a = \infty$, also ist die allgemeine Gleichung $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$, in diesem Falle $\frac{y}{b} = 1$ oder

$$22. \quad y = b,$$

daß dieses die Gleichung einer, mit der Axe der x parallelen, geraden Linie sey, ist an sich klar, weil für jedes beliebige x, $y = b$ ist.

15.

Für eine gerade Linie, die auf einer der Axen, z. B. auf der Axe der y perpendiculär steht, ist $a = \infty$, also wie vorhin

$$23. \quad y = b,$$

wie es auch seyn muß, weil eine gerade Linie, die mit einer der Axen parallel ist, auf der andern senkrecht steht.

16.

Wenn zwei gerade Linien mit einander parallel sind, so haben sie gleiche Neigungen gegen die Axen. Wenn also ihre Gleichungen

$$y + \frac{b}{a}x = b \text{ und } y + \frac{b'}{a'}x = b'$$

sind, so muß

$$24. \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \text{ oder}$$

$$a'b - ab' = 0, \text{ oder}$$

$$k = k', \; m = m'$$

seyn, denn k und m, k' und m' sind die Tangenten der Win-

kel, welche die Linien mit der Axe der x machen. Die Gleichungen der Linien selbst sind:

$$25. \begin{cases} y + kx = b \text{ und } y + k'x = b', \text{ oder} \\ x + my = a \text{ und } x + m'y = a', \text{ oder} \\ ay + bx = ab \text{ und } a'y + b'x = a'b'. \end{cases}$$

17.

Fig. 10. Stehen zwei gerade Linien auf einander senkrecht, so ist der Unterschied ihrer Neigungen gegen eine und dieselbe Axe einem rechten Winkel gleich, denn wenn der Winkel, den die eine Linie mit der Axe macht, CBA ist, so ist der Winkel, den die andere Linie mit der Axe macht, CDA, wenn nämlich DCB ein rechter Winkel ist. Aber CDA, als der äußere Winkel, ist von CBA um DCB verschieden, also ist der Unterschied ein rechter Winkel. Heißt also die Neigung der einen Linie gegen die Axe μ, der andern ν, so ist $\mu - \nu = \varrho$ *), also ist $\text{tang.}\,\mu = \text{tang.}(\varrho + \nu) = -\cot.\,\mu = -\frac{1}{\text{tang.}\,\nu}$

Sind nun die Gleichungen der beiden Linien wie oben

$$y + kx = b \text{ und } y + k'x = b',$$

so ist $k = \text{tang.}\,\mu$ und $k' = \text{tang.}\,\nu$, also muß seyn

$$26. \begin{cases} k = -\frac{1}{k'}, \; m = -\frac{1}{m'}, \text{ oder } \frac{b}{a} = -\frac{a'}{b'}, \text{ oder} \\ aa' + bb' = 0. \end{cases}$$

Dieses ist die Bedingung für die Größen a, b und a', b', wenn zwei gerade Linien auf einander senkrecht seyn sollen und die Gleichungen zweier auf einander senkrechten Linien sind.

$$27. \begin{cases} y + kx = b \text{ und } y - xk = b', \text{ oder} \\ x + my = a \text{ und } x - my = a', \text{ oder} \\ ay + bx = ab \text{ und } by - ax = bb'. \end{cases}$$

Fig. 11. Dieser Zusammenhang der Gleichungen zweier auf einander senkrechten geraden Linien läßt sich auch, wie folgt, geometrisch zeigen. Wenn nämlich die geraden Linien XY und X'Y' auf einander senkrecht stehen, so sind die rechtwinkligen Dreiecke YY'Q und YAX ähnlich, denn sie haben den Win-

*) ϱ soll überall einen rechten Winkel bedeuten.

kel Y gemein. Aber auch die rechtwinkligen Dreiecke X′Y′A und Y′YQ sind ähnlich, denn die Scheitelwinkel bei Y′ sind gleich groß, also sind die Dreiecke X′Y′A und XYA ähnlich. Da nun AX = a, AY = b, AX′ = a′, AY′ = b′, so ist $\frac{b}{a} = -\frac{a'}{b'}$ wie oben. Der obige erste Beweis ist aber allgemeiner und besser, denn man hat bei demselben keine besondern Fälle zu betrachten, wie bei dem zweiten, wo man sich für die verschiedenen Lagen der Linie X′Y′ erst überzeugen muß, daß eine der Größen a′ und b′ immer negativ ist.

18.

Wenn zwei gerade Linien mit einander einen beliebigen Winkel λ machen, so ist dieser Winkel der Unterschied ihrer Neigungen gegen eine der Axen, z. B. gegen die Axe der x, also ist $\lambda = \mu - \nu$ aus demselben Grunde, wie bei der perpendiculären Linie in der vorigen Nummer.

Also ist $\text{tang.}\ \lambda = \frac{\text{tang.}\ \mu - \text{tang.}\ \nu}{1 + \text{tang.}\ \mu\ \text{tang.}\ \nu}$. Da nun

$\text{tang.}\ \mu = \frac{b}{a}$, $\text{tang.}\ \nu = \frac{b'}{a'}$, so ist

$$28.\quad \text{tang.}\ \lambda = \frac{\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}}{1 + \frac{b}{a} + \frac{b'}{a'}} = \frac{a'b - ab'}{aa' + bb'} = \frac{k - k'}{1 + kk'}$$

$$= \frac{m + m'}{1 + mm'}.$$

Aus $\mu - \nu = \lambda$ folgt auch $\nu = \mu - \lambda$ also $\text{tang.}\ \nu = \frac{\text{tang.}\ \mu - \text{tang.}}{1 + \text{tang.}\ \lambda\ \text{tang.}\ \mu}$,

mithin, weil $\text{tang}\ \mu = \frac{b}{a}$, $\text{tang.}\ \nu = \frac{b'}{a'}$ ist,

$$29.\quad \frac{b'}{a'} = \frac{\frac{b}{a} - \text{tang.}\ \lambda}{1 + \text{tang.}\ \lambda\ \frac{b}{a}} = \frac{b - a\ \text{tang.}\ \lambda}{a + b\ \text{tang.}\ \lambda},$$ oder

$$k' = \frac{k - \text{tang.}\,\lambda}{1 + k\,\text{tang.}\,\lambda}, \quad m' = \frac{m - \text{tang.}\,\lambda}{1 + m\,\text{tang.}\,\lambda},$$

und die Gleichungen zweier geraden Linien, die mit einander den Winkel λ machen, sind:

$$30. \left\{ \begin{array}{l} y + \frac{b}{a} x = b \ \text{und} \ y + \frac{b - a\,\text{tang.}\,\lambda}{a + b\,\text{tang.}\,\lambda} x = b', \\ \text{oder} \ x + \frac{a}{b} y = a \ \text{und} \ x + \frac{a - b\,\text{tang.}\,\lambda}{b + a\,\text{tang.}\,\lambda} y = a', \\ \text{oder} \ y + k x = b \ \text{und} \ y + \frac{k - \text{tang.}\,\lambda}{1 + k\,\text{tang.}\,\lambda} x = b', \\ \text{oder} \ x + k y = a \ \text{und} \ x + \frac{m - \text{tang.}\,\lambda}{1 + m\,\text{tang.}\,\lambda} y = a', \\ \text{oder} \ a y + b x = a b \ \text{und} \ (a - b\,\text{tang.}\,\lambda) y \\ \quad + (b - a\,\text{tang.}\,\lambda) x = b' (a + b\,\text{tang.}\,\lambda). \end{array} \right.$$

Sollen die Linien die Hälfte eines rechten Winkels einschließen, so ist $\text{tang.}\,\lambda = 1$, und die Gleichungen zwei solcher Linien sind:

$$31. \quad y + \frac{b}{a} x = b \ \text{und} \ y + \frac{b - a}{b + a} x = b'.]$$

19.

Soll eine gerade Linie mit einer der Axen, z. B. mit der Axe der x den Winkel λ machen, so ist $\frac{b}{a} = \text{tang.}\,\lambda$ und ihre Gleichung

$$32. \quad y + x\,\text{tang.}\,\lambda = b.$$

20.

Für den Durchschnitts-Punkt zweier geraden Linien in der Ebene müssen die Gleichungen der beiden Linien zugleich passen, weil er in beiden Linien zugleich liegt. Sind nämlich die Gleichungen der beiden Linien

$$y + \frac{b}{a} x = b \ \text{und} \ y + \frac{b'}{a'} x = b'$$

und die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts, p und q, so ist für denselben

$$q + \frac{b}{a}p = b \text{ und } q + \frac{b'}{a'}p = b',$$

also wenn man eine Gleichung von der andern abzieht, $\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)p = b - b'$, woraus folgt:

$$33. \quad p = \frac{a\,a'(b-b')}{a'b - a\,b'} = \frac{b-b'}{k-k'}$$

und wenn man a mit b, a' mit b' und p mit q verwechselt,

$$34. \quad q = \frac{b\,b'(a-a')}{a\,b' - a'b} = \frac{a-a'}{m-m'}.$$

Stehen die beiden Linien auf einander senkrecht, so muß seyn $b\,b' = -a\,a'$ (26.), also sind in diesem Fall die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts

$$35. \quad p = \frac{a\,a'(b-b')}{a'b - a\,b'} = \frac{b-b'}{k-k'},\ q = -\frac{a\,a'(a-a')}{a'b - a\,b'} = -\frac{a-a'}{k-k'},$$

also ist

$$36. \quad \frac{p}{q} = -\frac{b-b'}{a-a'}.$$

Sollen die Linien den Winkel λ mit einander machen, so muß seyn $\frac{b'}{a'} = \frac{b - a\,\text{tang.}\,\lambda}{a + b\,\text{tang.}\,\lambda}$ (29.), folglich ist in diesem Falle

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{b - a\,\text{tang.}\,\lambda}{a + b\,\text{tang.}\,\lambda}\right)p = b - b', \text{ oder}$$

$$\frac{a\,b + b^2\,\text{tang.}\,\lambda - a\,b + a^2\,\text{tang.}\,\lambda}{a(a + b\,\text{tang.}\,\lambda)}\,p = b - b', \text{ also}$$

$$37. \quad p = \frac{a(b-b')(a + b\,\text{tang.}\,\lambda)}{(a^2+b^2)\,\text{tang.}\,\lambda}$$

und ähnlicher Weise

$$38. \quad q = \frac{b(a-a')(b - a\,\text{tang.}\,\lambda)}{(a^2+b^2)\,\text{tang.}\,\lambda},$$

also

$$39. \quad \frac{p}{q} = \frac{a(b-b')(a + b\,\text{tang.}\,\lambda)}{b(a-a')(b - a\,\text{tang.}\,\lambda)}.$$

21.

Soll eine gerade Linie $y + k\,x = b$ durch einen gegebenen Punkt $p\,q$ gehen, so ist $q + k\,p = b$, weil für denselben, wie

für alle andere Punkte der Linie, die Gleichung gilt. Zieht man also diese Gleichung von der Gleichung der Linie ab, so kommt

$$40.\ \begin{cases} y-q+k(x-p)=0 \text{ oder } (x-q)+\frac{b}{a}(x-p)=0, \\ \text{oder } (y-q)a+(x-p)b=0, \end{cases}$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die durch den Punkt pq geht. Ist der Punkt, durch welchen die Linie gehen soll, der Punkt o, so sind p und $q=0$, und die Gleichung der Linie ist

$$y+kx=0 \text{ oder } y+\frac{b}{a}x=0,$$

wie 21. Da sich aus dieser einen Gleichung die beiden Größen a und b nicht finden lassen, so folgt, daß, wie es wirklich der Fall ist, durch einen beliebigen Punkt pq unzählige verschiedene grade Linien gehen können.

22.

Soll eine gerade Linie $y+\frac{b}{a}x=b$ durch zwei gegebene Punkte pq und $p'q'$ gehen, so ist

$$q+\frac{b}{a}p=b \text{ und } q'+\frac{b}{a}p'=b,$$ also wenn man diese beiden Gleichungen von einander abzieht

$$q-q'+\frac{b}{a}(p-p')=0, \text{ also } \frac{b}{a}=-\frac{q-q'}{p-p'} \text{ und folglich}$$

$$q-\frac{q-q'}{p-p'}.p=b=\frac{pq-p'q-pq+pq'}{p-p'} \text{ oder}$$

$$41.\ b=\frac{pq'-p'q}{p-p'}$$

ferner, weil $a=-b.\frac{p-p'}{q-q'}$

$$42.\ a=-\frac{pq'-p'q}{q-q'}$$

also $y-\frac{q-q'}{p-p'}x=\frac{pq'-p'q}{p-p'}$ oder

$$43.\ (p-p')y-(q-q')x=pq'-p'q,$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die durch die beiden

Punkte pq und $p'q'$ geht. Der zweite Theil der Gleichung drückt die doppelte Fläche des Dreiecks RAR' (Fig. 12.) aus, wenn R und R' die beiden Punkte pq und $p'q'$ sind; denn diese Fläche ist $= pq + (p' - p)(q' + q) - p'q' = pq + p'q' + p'q - pq' - pq - p'q' = p'q - pq'$. Ferner sind $(p - p')y$ und $(q - q')x$ Parallelogramme, die die Projectionen der Linie RR' auf die Axen zur Grundlinie und x und y zur Höhe haben. Die Summe dieser Parallelogramme ist also, zufolge der Gleichung, für alle Punkte der Linie xy constant, und dem doppelten Dreieck $RR'A$ gleich, denn es ist $(p' - p)y + (q - q')x = p'q - pq'$.

23.

Ist einer der beiden Punkte, durch welche eine gerade Linie geht, z. B. der Punkt $p'q'$, der Anfangs-Punkt der Coordinaten, so ist p' und $q' = 0$, also ist aus 43.

44. $py - qx = 0$,

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die durch den Punkt pq und durch den Punkt 0 geht.

24.

Soll eine gerade Linie, die mit der Axe der x parallel ist, oder auf der Axe der y senkrecht steht, durch den Punkt pq gehen, so ist ihre Gleichung

45. $y = q$,

denn aus (23.) ist $q = b$, für den Punkt pq aber, weil $y = b$, auch $y = q$. p kann in dieser Gleichung deshalb nicht vorkommen, weil die Linie nicht allein durch den Punkt pq, sondern durch alle Punkte geht, deren Ordinaten q sind.

25.

Soll eine gerade Linie auf einer andern $ay + bx = ab$ senkrecht seyn und zugleich durch den Punkt pq gehen, so gibt ihre Gleichung, die $by - ax = bb'$ ist (27.) für $x = p$ und $y = q$, $bq - ap = bb'$, also ist $by - ax = bq - ap$ oder

46. $b(y - q) - a(x - p) = 0$,

welches also die Gleichung einer geraden Linie ist, die auf einer

andern geraden Linie $ay+bx=ab$ senkrecht steht, und zugleich durch einen gegebenen Punkt pq geht.

Ist der gegebene Punkt pq der Anfangs-Punkt der Coordinaten, so ist $p=0$ und $q=0$, also

$$47.\quad by-ax=0,$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die durch den Punkt 0 geht und auf einer andern $ay+bx=ab$ senkrecht steht.

Ist die Linie, auf welcher eine andere, durch den Punkt pq gehende, senkrecht stehen soll, nicht sowohl durch die Gleichung $ay+bx=ab$, als durch zwei Punkte $p'q'$ und $p''q''$ gegeben, durch welche sie geht, so ist ihre Gleichung, zufolge (43.)

$$(p'-p'')y-(q'-q'')x=p'q''-p''q' \text{ oder}$$

$$y-\frac{q'-q''}{p'-p''}x=\frac{p'q''-p''q'}{p'-p''}.$$

Diese Gleichung mit der Gleichung der Linie $y+x\frac{b}{a}=b$ verglichen, gibt $b=\frac{p'q''-p''q'}{p'-p''}$ und $\frac{b}{a}=-\frac{q'-q''}{p'-p''}$. Nun war die Gleichung einer, durch den Punkt pq gehenden, auf $ay+bx=ab$ senkrechten geraden Linie, $b(y-q)-a(x-p)=0$ (46.) oder $\frac{b}{a}(y-q)-(x-p)=0$, also ist $-\frac{q'-q''}{p'-p''}(y-q)-(x-p)=0$ oder

$$48.\quad (y-q)(q'-q'')+(x-p)(p'-p'')=0,$$

welches die Gleichung einer, durch den Punkt pq gehenden geraden Linie ist, die zugleich auf einer andern, durch die beiden Punkte $p'q'$ und $p''q''$ gehenden, senkrecht steht.

Ist einer von den beiden Punkten $p'q'$ und $p''q''$, z. B. der zweite, der Anfangs-Punkt der Coordinaten, so ist $p''=0$ und $q''=0$, also ist

$$49.\quad (y-q)q'+(x-p)p'=0,$$

welches also die Gleichung einer, durch den Punkt pq gehenden geraden Linie ist, die auf einer andern, durch den Punkt $p'q'$ und 0 gehenden, senkrecht steht.

26.

Die Coordinaten der Durchschnitts-Punkte auf einander senkrechter Linien, die zugleich durch bestimmte Punkte gehen, findet man, wie (§. 20.) z. B. die Gleichung einer geraden Linie, die durch den Punkt pq geht, und zugleich auf einer andern geraden Linie $ay + bx = ab$ senkrecht steht, war $b(y-q) - a(x-p) = 0$ (46.).

Heißen nun die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts s und t, so ist für sie $at + bs = ab$ und $b(t-q) - a(s-p) = 0$, also, wenn man t wegschafft,

$$b^2 s + a^2 (s-p) + abq = ab^2, \text{ folglich}$$

$$50. \quad s = \frac{a(b^2 + ap - bq)}{a^2 + b^2},$$

und auf eine ähnliche Weise

$$51. \quad t = \frac{b(a^2 - ap + bq)}{a^2 + b^2}.$$

Geht das Perpendikel durch den Punkt o, so sind p und $q = 0$, und es ist

$$52. \quad s = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad t = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

27.

Die Länge eines durch einen bestimmten Punkt pq gehenden Perpendikels auf eine gegebene gerade Linie, von dem Punkt pq an bis zu der Linie, ist $\sqrt{((p-s)^2 + (q-t)^2)}$. Man könnte also dieselbe finden, wenn man hierin die Ausdrücke von s und t aus der vorigen Nummer setzt. Allein man kann die Länge kürzer haben; denn der Inhalt (Fig. 13.) des Dreiecks AXY ist $= \frac{1}{2}ab$, der Inhalt der Dreiecke ARX und ARY ist $= \frac{1}{2}aq$ und $\frac{1}{2}bp$, also ist der Inhalt des Dreiecks RXY $= \frac{1}{2}(ap - aq - bp)$. Nun ist RM gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks RXY, dividirt durch die Seite $XY = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, also ist die Länge des Perpendikels RM, die P heißen soll,

$$53. \quad P = \frac{ab - aq - bp}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

Liegt der Punkt pq im Anfangs-Punkt der Coordinaten, so ist $p=0$ und $q=0$ und die Länge des Perpendikels ist

$$54.\quad P=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2.)}}$$

Auch noch anders kann man die Länge des Perpendikels finden.

Fig. 14. Da nämlich das Dreieck RMN dem Dreieck AXY ähnlich ist, so ist $\frac{P}{s-p}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$, folglich

$$P=(s-p)\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{b.}$$ Nun war

$$s=\frac{ab^2+a^2p-abq}{a^2+b^2}$$ also $s-p$

$$=\frac{ab^2+a^2p-abq-a^2p-b^2p}{a^2+b^2}=\frac{b(ab-aq-bp)}{a^2+b^2},$$

also ist

$$P=\frac{ab-aq-bp}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

wie 53., doch ist wohl die erste Art in dieser Nummer die kürzeste und directeste.

Von der Ebene.

Durchschnitte einer Ebene mit den Coordinaten-Ebenen.

28.

Die Gleichung der Ebene war

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Ist die Ebene auf einer der Coordinaten-Ebenen, z. B. auf der Ebene der xy senkrecht, so schneidet sie die Axe der z nicht, folglich ist $c=\infty$, also $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, oder $bx+ay=ab$, mithin sind

$$55.\quad bx+ay=ab,\ cx+az=ac \text{ und } cy+bz=bc$$

die Gleichungen der auf die Ebene der xy, der xz und der yz perpendiculären, oder mit den Axen der z, der y und der x parallelen Ebenen, wie schon oben erwähnt worden. Ist die Ebene mit einer der Coordinaten-Ebenen, z. B. mit der Ebene der xy parallel, also auf der Axe der z senkrecht, so schneidet sie weder die Axe der x, noch die Axe der y, also sind a und b beide $= \infty$ und die Gleichung der Ebene ist $\frac{z}{c} = 1$, folglich sind

$$56.\quad z = c,\ y = b,\ x = a$$

die Gleichungen von Ebenen, die mit denen der xy, der xz und der yz parallel, oder auf der Axe der z, der y und der x perpendiculär sind.

29.

Eine Ebene schneidet die andere in einer geraden Linie, also schneidet auch die Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ die Coordinaten-Ebenen in solchen geraden Linien. Für diese Durchschnitte ist allemal eine der Coordinaten o, z. B. für den Durchschnitt mit der Ebene der xy die Coordinate z, also sind

$$57.\quad bx + ay = ab,\ cx + az = ac \text{ und } cy + bz = bc$$

die Gleichungen der Durchschnitte der schiefen Ebene mit denen der Coordinaten. Sie sind ganz denen von Ebenen gleich, die auf den Coordinaten-Ebenen senkrecht stehen, nur sind hier a, b und c die Entfernungen der Durchschnitts-Punkte der schiefen Ebene und der Axe, von dem Punkt o selbst.

30.

Die Tangenten der Winkel, welche die Durchschnitte der schiefen Ebene mit den Coordinaten-Ebenen machen, sind

58. Fig. 14.

$$\begin{cases} \text{tang. } YXA = \frac{b}{a} = k, \ \text{tang. } A'YA = \frac{c}{b} = m, \\ \text{tang. } XA'A = \frac{a}{c} = n \ (\text{§. 10. II.}); \\ \text{tang. } XYA = \frac{a}{b} = \frac{1}{k}, \ \text{tang. } YA'A = \frac{b}{c} = \frac{1}{m}, \\ \text{tang. } A'XA = \frac{c}{a} = \frac{1}{n}, \end{cases}$$

also ist, weil $kmn = 1$,

59. $$\begin{cases} \text{tang. } YXA \,.\, \text{tang. } A'YA \,.\, \text{tang. } XA'A = 1 \text{ und} \\ \text{tang. } XYA \,.\, \text{tang. } YA'A \,.\, \text{tang. } A'XA = 1. \end{cases}$$

31.

Die Winkel, welche die Durchschnitte der schiefen Ebene und der Coordinaten-Ebenen unter sich machen, findet man aus der Länge dieser Durchschnitte. Die Länge dieser Durchschnitte ist nämlich

60. $$= \sqrt{(a^2 + b^2)}, \ \sqrt{(b^2 + c^2)}, \ \sqrt{(c^2 + a^2)}.$$

Diese drei Linien bilden ein Dreieck $YA'X$, welches **Hypotenusal-Ebene** heißen soll, im Gegensatz zu den drei Dreiecken AXY, AXA' und AYA', die die schiefe Ebene von den Coordinaten-Ebenen abschneidet, und welche **Catheten-Ebenen** heißen sollen. Die Winkel dieses Dreiecks sind die verlangten. Sie sollen in der Ordnung, wie sie den vorhin bezeichneten Seiten gegenüber stehen, σ, τ und υ heißen. Alsdann ist vermöge des bekannten Ausdrucks des Cosinus eines Winkels durch die Seiten eines Dreiecks

$$\frac{(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) - (a^2 + b^2)}{2\sqrt{(a^2 + c^2)}\sqrt{(b^2 + c^2)}} = \cos.\sigma, \text{ also}$$

61. $$\begin{cases} \cos.\sigma = \dfrac{c^2}{\sqrt{(a^2 + c^2)}\sqrt{(b^2 + c^2)}} \\ \cos.\tau = \dfrac{a^2}{\sqrt{(b^2 + a^2)}\sqrt{(c^2 + a^2)}} \\ \cos.\upsilon = \dfrac{b^2}{\sqrt{(c^2 + b^2)}\sqrt{(a^2 + b^2)}} \end{cases}$$

Unter sich haben die Winkel alle die Verhältnisse, welche überhaupt den Winkeln eines beliebigen Dreiecks zukommen.

Winkel der Ebene mit den Coordinaten-Ebenen.

32.

Die Catheten-Ebenen sind die Projectionen der Hypotenusal-Ebene auf die Coordinaten-Ebenen. Heißen die Winkel, welche die Hypotenusal-Ebene mit den Ebenen der xy, der yz und der zx macht A, B, C, so sind die Catheten-Ebenen gleich der Hypotenusal-Ebene H, multiplicirt mit dem Cosinus der Winkel A, B, C. Die Catheten-Ebenen sind der Reihe nach $\frac{1}{2}ab$, $\frac{1}{2}bc$ und $\frac{1}{2}ca$, also ist

$$62.\quad ab = 2H.\cos.A,\quad bc = 2H.\cos.B,\quad ca = 2H.\cos.C.$$

Fig. 15. Es sey nämlich $D'YXE'$ ein Parallelogramm, welches mit der Hypotenusal-Ebene gleiche Grundlinie XY und gleiche Höhe $D'Y$ hat, $DYXE$ sey die Projection dieses Parallelogramms auf die Ebene der xy, die also ebenfalls ein Parallelogramm ist, so ist diese Projection offenbar gleich dem Parallelogramm $D'YXE'$ multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels A, den das Parallelogramm $D'YXE'$ mit seiner Projection einschließt; denn die Grundlinie beider Parallelogramme ist gleich und die Höhen verhalten sich wie 1 zu $\cos.A$. Nun aber sind die Dreiecke $A'YX$ und AYX die Hälften der Parallelogramme $D'YXE'$ und $DYXE$, also ist auch $\Delta AYX = \Delta A'YX.\cos.A$.

33.

Hieraus findet man auf eine eigenthümliche Art den Inhalt der Hypotenusal-Ebene sehr leicht. So wie nämlich die Catheten-Ebenen die Projectionen der Hypotenusal-Ebenen auf die Coordinaten-Ebenen sind, so ist umgekehrt die Hypotenusal-Ebene die Summe der Projectionen der Catheten-Ebenen auf die Hypotenusal-Ebene. Also ist zugleich

$$63.\quad \left\{\begin{array}{l} ab = 2H.\cos.A,\ bc = 2H.\cos.B, \\ ca = 2H.\cos.C \text{ und} \\ 2H = ab.\cos.A + bc.\cos.B + ca.\cos.C. \end{array}\right.$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt

$$\cos. A = \frac{ab}{2H}, \cos. B = \frac{bc}{2H}, \cos. C = \frac{ca}{2H}.$$

Setzt man dieses in die vierte Gleichung, so kommt

$$2H = \frac{a^2 b^2}{2H} + \frac{b^2 c^2}{2H} + \frac{c^2 a^2}{2H} \text{ oder}$$

$$64. \quad H^2 = \tfrac{1}{4} a^2 b^2 + \tfrac{1}{4} b^2 c^2 + \tfrac{1}{4} c^2 a^2,$$

das heißt, das Quadrat der Hypotenusal-Ebene ist gleich der Summe der Quadrate der Catheten-Ebenen.

Diesen Satz, den de Gua in den Pariser Memoiren von 1786 für sich in Anspruch nimmt, der aber Tinseau zugehören soll, pflegt man gewöhnlich dadurch herzuleiten, daß man den Inhalt des Hypotenusal-Dreiecks aus seinen drei Seiten $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, $\sqrt{(b^2 + c^2)}$, $\sqrt{(c^2 + a^2)}$ nach der gewöhnlichen Formel für den Inhalt eines Dreiecks berechnet. Allein dieses erfordert eine weitläuftigere Rechnung. Man findet den Satz auf die obige Weise leichter.

34.

Die Winkel, welche die schiefe Ebene mit den Coordinaten-Ebenen macht, finden sich aus den Gleichungen (63.). Wenn man nämlich daselbst den Werth der H aus (64.) substituirt, so kommt

$$65. \begin{cases} \cos. A = \dfrac{ab}{\sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}} \\ \cos. B = \dfrac{bc}{\sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}} \\ \cos. C = \dfrac{ca}{\sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}}. \end{cases}$$

Aus (65.) sowohl, als noch unmittelbarer aus (63.), wenn man dort die Werthe von ab, bc und ca aus den drei ersten Gleichungen in die vierte setzt, folgt

$$66. \quad \cos. A^2 + \cos. B^2 + \cos. C^2 = 1,$$

das heißt: die Summe der Quadrate der Cosinus der Winkel, welche eine Ebene mit drei andern beliebigen auf einander senk-

rechten Ebenen einschließt, ist allemal $=1$. Aus (66.) folgt unmittelbar

67. $\sin. A^2 + \sin. B^2 + \sin. C^2 = 2$,

wenn man nämlich $1 - \sin. A^2$, $1 - \sin. B^2$, $1 - \sin. C^2$ statt $\cos. A^2$, $\cos. B^2$ und $\cos. C^2$ schreibt.

Die Rechnung, durch welche man diese Sätze gewöhnlich findet, ist weitläuftiger und dunkler.

Die Sinus von A, B und C in a, b und c ausgedrückt, sind

$$68. \begin{cases} \sin. A = c\sqrt{\left(\frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}\right)} \\ \sin. B = a\sqrt{\left(\frac{c^2 + b^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}\right)} \\ \sin. C = b\sqrt{\left(\frac{a^2 + c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}\right)} \end{cases}$$

Also sind die Tangenten, die man erhält, wenn man die Sinus durch die Cosinus dividirt,

$$69. \begin{cases} \text{tang. } A = \frac{c}{ab}\sqrt{(a^2 + b^2)} \\ \text{tang. } B = \frac{a}{bc}\sqrt{(b^2 + c^2)} \\ \text{tang. } C = \frac{b}{ca}\sqrt{(c^2 + a^2)}. \end{cases}$$

Gebraucht man die Bezeichnung

$\frac{b}{a} = k$, $\frac{c}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$, so ist, weil z. B.

$$\cos. A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right)}} \text{ war,}$$

$$\cos. A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2} + m^2\right)}},$$ also ist, weil $\frac{1}{n} = km$, indem $kmn = 1$,

$$70.\quad \begin{cases} \cos. A = \dfrac{1}{\sqrt{(1+m^2+m^2k^2)}}, \\ \sin. A = m\sqrt{\left(\dfrac{1+k^2}{1+m^2+m^2k^2}\right)} \\ \cos. B = \dfrac{1}{\sqrt{(1+n^2+n^2m^2)}}, \\ \sin. B = n\sqrt{\left(\dfrac{1+m^2}{1+n^2+n^2m^2}\right)} \\ \cos. C = \dfrac{1}{\sqrt{(1+k^2+k^2n^2)}}, \\ \sin. C = k\sqrt{\left(\dfrac{1+n^2}{1+k^2+k^2n^2}\right)} \end{cases}$$

Die Tangenten sind, weil z. B. $\text{tang.}\, A = \frac{c}{b}\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}$ war,

$$71.\quad \begin{cases} \text{tang.}\, A = m\sqrt{(1+k^2)} \\ \text{tang.}\, B = n\sqrt{(1+m^2)} \\ \text{tang.}\, C = k\sqrt{(1+n^2)}. \end{cases}$$

Daraus folgt auch, weil $k\,m\,n = 1$,

$$72.\quad \text{tg.}\, A.\, \text{tg.}\, B.\, \text{tg.}\, C = \sqrt{(1+k^2)}\sqrt{(1+m^2)}\sqrt{(1+n^2)}$$

Aber $\sqrt{(1+k^2)}$, $\sqrt{(1+m^2)}$, $\sqrt{(1+n^2)}$ sind die Secanten der Winkel, deren Tangenten k, m, n sind. Heißen also diese Winkel K, M, N, so ist

$$73.\quad \text{tang.}\, A.\, \text{tang.}\, B.\, \text{tang.}\, C = \text{sec.}\, K.\, \text{sec.}\, M.\, \text{sec.}\, N.$$

Allgemeiner Satz von den Projectionen beliebiger Figuren auf die Coordinaten-Ebenen.

35.

Nach (64. §. 33.) war das Quadrat des Inhalts der schiefen Hypotenusal-Ebene der Summe der Quadrate der Inhalte

der Catheten-Ebenen oder ihrer Projectionen auf die Coordinaten-Ebenen gleich. Dieser Satz gilt für jede beliebige Figur in einer Ebene und ihre Projectionen auf drei beliebige andere, auf einander senkrechte Ebenen. (Fig. 16.) Denn es sey D′E′F′G′H′I′ eine beliebige Figur in der Ebene A′YX, DEFGHI aber ihre Projection auf die Ebene der XY, die mit der Ebene A′YX den Winkel A macht. D′d und E′e sowohl, als Dd und Ee sollen perpendiculär auf YX seyn, so ist der Inhalt des Trapezes EedD gleich demjenigen des Trapezes E′edD′ multiplicirt mit cos. A, denn der erste ist gleich dem Produkte der Grundlinie ed in die halbe Summe von Ee und Dd, der letzte ist gleich dem Produkte der nämlichen Grundlinie ed in die halbe Summe von E′e und D′d; Ee und Dd aber sind $= E'e \cos. A$ und $D'd \cos. A$. So verhält es sich mit allen übrigen Trapezen EFef, E′F′ef 2c. Nun ist aber die algebraische Summe aller dieser Trapeze in der schiefen Ebene und in der Projection dem Inhalt, der Figur D′E′F′G′H′I′ in ersterer, und der Figur DEFGHI in letzterer, gleich, also ist der Inhalt der Projection der Figur gleich dem Producte des Inhalts der Figur selbst in den Cosinus des Winkels, den die schiefe Ebene und die Ebene der xy einschließen. Heißt also der Inhalt der Figur $= F$, der Inhalt ihrer Projection auf die Ebene der xy, yx und zx, F', F'', F''', so ist

$$F' = F \cos. A, \quad F'' = F \cos. B, \quad F''' = F \cos. C.$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie, so erhält man

$$F'^2 + F''^2 + F'''^2 = F^2 (\cos. A^2 + \cos. B^2 + \cos. C^2)$$

Es ist aber $\cos. A^2 + \cos. B^2 + \cos. C^2 = 1$ (66.), also ist

$$74. \quad F'^2 + F''^2 + F'''^2 = F^2,$$

das heißt: das Quadrat des Inhalts jeder Figur in einer beliebigen Ebene ist gleich der Summe der Quadrate des Inhalts ihrer Projectionen auf drei beliebige andere auf einander senkrechte Ebenen. Der Beweis dieses Satzes ist bei Monge weitläuftiger.

Länge des Perpendikels auf eine schiefe Ebene.

36.

Die Länge des Perpendikels aus einem gegebenen Punkte p, q, r auf eine schiefe Ebene findet man sehr leicht, wenn man den Punkt als die Spitze einer Pyramide betrachtet, deren Grundfläche der von den Coordinaten-Ebenen abgeschnittene Theil der schiefen Ebene ist, und den Inhalt dieser Pyramide mit dem Flächeninhalt des abgeschnittenen Theils der schiefen Ebene dividirt.

Fig. 17. Es sey M der gegebene Punkt p, q, r, so ist der Inhalt der Pyramide, welche M zur Spitze und das Dreieck AXY zur Grundfläche hat, $=\frac{1}{6}abr$. Der Inhalt der Pyramide, welche M zur Spitze und das Dreieck AYA' zur Grundfläche hat, ist $\frac{1}{6}bcp$, und der Inhalt derjenigen Pyramide, welche M zur Spitze und AXA' zur Grundfläche hat, ist $\frac{1}{6}caq$. Zieht man den Inhalt dieser drei Pyramiden von dem Inhalte der ganzen Pyramide AXYA', welcher $\frac{1}{6}abc$ ist, ab, so bleibt der Inhalt der Pyramide übrig, welche M zur Spitze und den von den Coordinaten-Ebenen abgeschnittenen Theil der schiefen Ebene A'YX zur Grundfläche hat. Dieser also ist $\frac{1}{6}(abc-abr-bcp-caq)$. Dividirt man diesen körperlichen Inhalt durch den Flächen-Inhalt des durch die Coordinaten-Ebenen abgeschnittenen Stücks der schiefen Ebene, welcher $H=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}$ war (64.), so erhält man den dritten Theil der Länge des Perpendikels aus dem Punkt M auf die schiefe Ebene, denn der dritte Theil dieses Perpendikels mit der Grundfläche A'YX multiplicirt, gibt den körperlichen Inhalt der Pyramide, die A'XY zur Grundfläche und M zur Spitze hat. Heißt also der Perpendikel P, so ist

$$\frac{1}{3}P=\frac{\frac{1}{6}abc-abr-bcp-caq}{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}},\text{ oder}$$

$$75.\quad\left\{\begin{aligned}P&=\frac{(abc-abr-bcp-caq)}{\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}},\text{ oder}\\P&=\frac{1-\frac{p}{a}-\frac{q}{b}-\frac{r}{c}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}}\end{aligned}\right.$$

welches die Länge des Perpendikels aus dem Punkt p, q, r auf die schiefe Ebene $bcx + cay + abz = abc$ ist.

Liegt der Punkt p, q, r in dem Punkt o, so sind p, q und $r = o$, also ist

$$
76. \quad \left\{ \begin{aligned}
P &= \frac{c}{\sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right)}} = \frac{c}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2} + m^2\right)}}, \text{ oder} \\
P &= \frac{c}{\sqrt{(1 + m^2 + k^2 m^2)}} = \frac{a}{\sqrt{(1 + n^2 + m^2 n^2)}} \\
&= \frac{b}{\sqrt{(1 + k^2 + n^2 k^2)}}, \text{ oder} \\
P &= \frac{abc}{\sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}}, \text{ oder} \\
P &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}}
\end{aligned} \right.
$$

welches die Länge des Perpendikels aus dem Punkte o auf die schiefe Ebene $bcx + cay + abz = abc$ ist.

Die Rechnung, durch welche man gewöhnlich diese Länge des Perpendikels zu finden pflegt, ist weitläuftiger. Man wendet auch die sogenannte Differential-Rechnung dazu an, indem man das Perpendikel aus der Eigenschaft sucht, daß es die kürzeste Linie von einem gegebenen Punkte nach der Ebene ist. Lagrange in der Abhandlung über die Pyramide verfährt so. Auch Lacroix in seinem Lehrbuche der Differential- und Integral-Rechnung erwähnt des Verfahrens. So elegant aber auch dasselbe seyn mag, so scheint es doch hier nicht her zu gehören, so lange nicht die sogenannte Differential- und Integral-Rechnung der Algebra einverleibt ist, was freilich geschehen könnte und sollte. Wie oben, findet sich die Länge des Perpendikels noch einfacher, als durch die Differential-Rechnung.

37.

Die Winkel, welche das Perpendikel auf eine schiefe Ebene mit den Axen macht, sind die nämlichen, das Perpendikel mag

durch den Punkt o oder durch irgend einen andern Punkt p, q, r gehen; denn man lege durch den Punkt p, q, r Coordinaten-Ebenen, die mit den durch den Punkt o gehenden parallel sind, so sind auch die neuen Axen mit den alten parallel, folglich sind die Winkel, die das Perpendikel durch p, q, r mit den neuen Axen macht, eben so groß, als die, welche es mit den alten Axen macht. Erstere aber sind diejenigen, welche ein Perpendikel durch den Punkt o mit den Axen macht, folglich sind die Winkel die nämlichen, das Perpendikel mag durch den Punkt o oder durch irgend einen andern Punkt p, q, r gehen. Diese Winkel sollen D, E und G heißen nnd die Länge des Perpendikels durch den Punkt o, P, so ist

$$a \cos. D = b \cos. E = c \cos. G = P$$

also, vermöge (76.)

$$77. \quad \left\{ \begin{aligned} \cos. D &= \frac{bc}{\sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}}, \\ \cos. E &= \frac{ac}{\sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}}, \\ \cos. G &= \frac{ab}{\sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}}, \end{aligned} \right.$$

daraus folgt

$$78. \quad \cos. D^2 + \cos. E^2 + \cos. G^2 = 1, \text{ und}$$

$$79. \quad \sin. D^2 + \sin. E^2 + \sin. G^2 = 2,$$

desgleichen

$$80. \quad \cos. D = \cos. B, \cos. E = \cos. C, \cos. G = \cos. A,$$

(65.) das heißt, die Winkel, welche das Perpendikel mit den Axen der x, y und z macht, sind so groß, als die Winkel, die die schiefe Ebene mit den Ebenen der yz, zx und xy macht. Ferner folgt aus (78. 79. 80.)

$$81. \quad \cos. D. \cos. B. + \cos. E \cos. C + \cos G. \cos. A = 1 \text{ und}$$

$$82. \quad \sin D. \sin. B. + \sin. E \sin. C + \sin. G. \sin. A = 2.$$

Heißen die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts des Perpendikels mit der schiefen Ebene x', y', z' und die Länge des

Perpendikels P, so ist $x' - p = P.\cos.D$, $y' - q = P.\cos.E$, $z' - r = P.\cos.G$, also ist $(x' - p)\cos.D + (y' - q)\cos.E + (z' - r)\cos.G = P(\cos.D^2 + \cos.E^2 + \cos.G^2)$, also, weil $\cos.D^2 + \cos.E^2 + \cos.G^2 = 1$ war (78.)

$$83.\quad (x' - p)\cos.D + (y' - q)\cos.E + (z' - r)\cos.G = P.$$

Für ein Perpendikel, das durch den Punkt o geht, sind $p', q, r = o$, also ist für ein solches

$$84.\quad x'\cos.D + y'\cos.E + z'\cos.G = P.$$

Wenn die Ebene durch einen bestimmten Punkt geht.

38.

Soll eine Ebene durch einen gegebenen Punkt p, q, r gehen, so ist ihre Gleichung

$bcx + cay + abz = abc$ für diesen Punkt

$bcp + caq + abr = abc$. Zieht man Eins vom Andern ab, so erhält man

$$85.\quad bc(x - p) + ca(y - q) + ab(z - r) = o,$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die durch den Punkt p, q, r geht. Die Gleichung $bcp + caq + abr = abc$ bestimmt das Verhältniß, welches zwischen a, b und c Statt findet.

Wenn die Ebene durch zwei bestimmte Punkte geht.

39.

Soll eine Ebene durch zwei gegebene Punkte p, q, r und p', q', r' gehen, so ist ihre Gleichung

$bcx + cay + abz = abc$, für diese beiden Punkte

$bcp + caq + abr = abc$ und

$bcp' + caq' + abr' = abc$.

Zieht man den Unterschied der beiden letzten Gleichungen von der ersten ab, so kommt

86. $bc(x-p+p')+ca(y-q+q')$
$+ab(z-r+r')=abc,$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die durch die beiden Punkte p, q, r und p', q', r' geht.

Die beiden Gleichungen $bcp+caq+abr=abc$ und $bcp'+caq'+abr'=abc$ bestimmen das Verhältniß, welches zwischen a, b und c Statt findet.

Wenn die Ebene durch drei bestimmte Punkte geht.

40.

Soll eine Ebene durch drei gegebene Punkte p, q, r; p', q', r' und p'', q'', r'' gehen, so ist ihre Gleichung $bcx+acy+abz=abc$ für diese drei Punkte

$$bcp+acq+abr=abc$$
$$bcp'+acq'+abr'=abc$$
$$bcp''+acq''+abr''=abc.$$

Aus diesen Gleichungen für die drei Punkte können alle drei Größen a, b, c in p, p', p'', q, q', q'' und r, r', r'' ausgedrückt werden, wie es seyn muß, weil die drei Punkte, durch welche die Ebene gehen soll, ihre Lage gänzlich bestimmen. Es kommt also darauf an, die drei Größen a, b, c aus den Gleichungen der Ebene wegzuschaffen. Man ziehe die zweite und die dritte von der ersten ab, so kommt

$$bc(p-p')+ac(q-q')+ab(r-r')=0$$
$$bc(p-p'')+ac(q-q'')+ab(r-r'')=0.$$

Die obere Gleichung von diesen beiden multiplicire man mit $p-p''$, die untere mit $p-p'$ und ziehe Eines von dem Andern ab, so kommt

$$ac[(q-q')(p-p'')-(q-q'')(p-p')]$$
$$+ab[(r-r')p-p'')-(r-r'')(p-p')]=0,$$

woraus folgt $ac = -ab \cdot \frac{(r-r')(p-p'')-(r-r'')(p-p')}{(q-q')(p-p'')-(q-q'')(p-p')}$.

Multiplicirt man hingegen die obere der beiden Gleichungen mit $q-q''$, die untere mit $q-q'$ und zieht Eines von dem Andern ab, so kommt

$$bc[(q-q'')(p-p')-(q-q')(p-p'')]$$
$$+ab[(r-r')(q-q'')-(r-r'')(q-q')]=0,$$

woraus folgt $bc = -ab \cdot \frac{(r-r')(q-q'')-(r-r'')(q-q')}{(q-q'')(p-p')-(q-q')(p-p'')}$.

Nun ist $bcp+acq+abr=abc$. Setzt man hierin die so eben gefundenen Ausdrücke für ac und bc, so kommt

$$abc=ab\left(r-q\cdot\frac{(r-r')(p-p'')-(r-r'')(p-p')}{(q-q')(p-p'')-(q-q'')(p-p')}\right.$$
$$\left.-p\cdot\frac{(r-r')(q-q'')-(r-r'')(q-q')}{(q-q'')(p-p')-(q-q'(p-p'')}\right)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Nenner $(q-q')(p-p'')-(q-q'')(p-p')$, den beide Brüche rechter Hand gemeinschaftlich haben, und dividirt sie mit ab, so kommt

$$c[(q-q')(p-p'')-(q-q'')(p-p')]$$
$$=r[(q-q')(p-p'')-(q-q'')(p-p')]$$
$$-q[(r-r')(p-p'')-(r-r'')(p-p')]$$
$$+p[(r-r')(q-q'')-(r-r'')(q-q')]$$

Verrichtet man die Multiplication in dieser Gleichung wirklich und läßt die Glieder weg, welche sich aufheben, so kommt

$$p(r'q''-r''q')+p'(r''q-rq'')+p''(rq'-r'q)$$
$$=c[p(q''-q')+p'(q-q'')+p''(q'-q)],$$

woraus folgt

$$\frac{1}{c}=\frac{p(q''-q')+p'(q-q'')+p''(q'-q)}{p(r'q''-r''q')+p'(r''q-rq'')+p''(rq'-r'q)},$$

Geht man nun mit den sämmtlichen Zeichen um Eines weiter,

nämlich von p nach q, von q nach r, von r nach p und von c nach a, so ist auch

$$\frac{1}{a}=\frac{q(r''-r')+q'(r-r'')+q''(r'-r)}{q(p'r''-p''r')+q'(p''r-pr'')+q''(pr'-p'r)}$$

und

$$\frac{1}{b}=\frac{r(p''-p')+r'(p-p'')+r''(p'-p)}{r(q'p''-q''p')+r'(q''p-qp'')+r''(qp'-q'p)}.$$

Die Nenner dieser drei Brüche sind einander gleich, wie sich findet, wenn man die in denselben angedeuteten Multiplicationen wirklich verrichtet. Da nun die Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

so erhält man, wenn man darin die obigen Ausdrücke für $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ setzt, nachdem mit dem gemeinschaftlichen Nenner der drei Brüche multiplicirt worden,

$$\begin{aligned}87.\quad &[q(r''-r')+q'(r-r'')+q''(r'-r)]x\\ &+[r(p''-p')+r'(p-p'')+r''(p'-p)]y\\ &+[p(q''-q')+p'(q-q'')+p''(q'-q)]z\\ &=p(r'q''-r''q')+p'(r''q-rq'')+p''(rq'-r'q),\end{aligned}$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die durch die drei Punkte p, q, r; p′, q′, r′ und p″, q″, r″ geht.

Man kann diese Gleichung auch so finden, daß man die Ebene erst durch zwei von den drei Punkten, z. B. durch den ersten und zweiten, darauf durch den zweiten und dritten und zuletzt durch den dritten und ersten gehen läßt, wodurch drei Gleichungen von der Form (86.) entstehen, zwischen welchen man die drei Größen a, b, c wegschaffen kann.

Ist einer der drei Punkte, durch welche die Ebene gehen soll, der Punkt o z. B. der Punkt p″, q″, r″, so sind p″, q″ und r″ = o, und man erhält

$$88.\quad (q'r-qr')x+(r'p-rp')y+(p'q-pq')z=0,$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die durch den Punkt o und zugleich durch die Punkte p, q, r und p′, q′, r′ geht.

Zweiter allgemeiner Satz von den Projectionen beliebiger Figuren auf die Coordinaten-Ebenen.

41.

Monge hat bemerkt, daß die Gleichung einer durch drei gegebene Punkte gehenden Ebene die Eigenschaft hat, daß die Coefficienten zu x, y und z die Projectionen ausdrücken von dem Dreiecke, welches die drei gegebenen Punkte in der Ebene bilden, auf die Ebene der yz, xz und xy, die Constante in der Gleichung aber den dreifachen Inhalt der Pyramide, die jenes Dreieck zur Grundfläche und den Anfangs-Punkt der Coordinaten zur Spitze hat, woraus also folgt, daß die Summe der drei Prismen, welche die Projectionen des Dreiecks auf die Coordinaten-Ebenen zur Grundfläche, und die Coordinaten irgend eines andern beliebigen Punktes der schiefen Ebene, er möge in- oder außerhalb des Dreiecks liegen, zur Höhe haben, constant, und zwar dem dreifachen Inhalte der Pyramide gleich sey, die das Dreieck zur Grundfläche und den Anfangs-Punkt der Coordinaten zur Spitze hat. Dieser interessante Satz findet aber nicht blos für das Dreieck Statt, welches die drei gegebenen Punkte in der Ebene bilden, sondern allgemein für jede beliebige Figur in der schiefen Ebene. Der Beweis ist durch die Rechnung sehr leicht.

Die Gleichung der Ebene ist nämlich allgemein

$$bcx + cay + abz = abc.$$

Man dividire diese Gleichung durch

$\sqrt{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}$, so kommt

$$\frac{bc}{\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}}x + \frac{ca}{\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}}y$$
$$+\frac{ab}{\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}}z = \frac{abc}{\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}}.$$

In dieser Gleichung sind die Coefficienten von x, y, z die Cosinus der Winkel A, B, C, welche die schiefe Ebene mit den Ebenen der yz, zx und xy macht. (65.) Die Constante hingegen ist das Perpendikel P aus dem Punkt o auf die schiefe Ebene (76.), also ist

$$89.\quad x\cos. B + y\cos. C + z\cos. A = P.$$

Nun sey M der Inhalt einer beliebigen Figur in der schiefen Ebene. Man multiplicire die Gleichung (89.) mit M, so kommt

$$90.\quad xM\cos. B + yM\cos. C + zM\cos. A = PM.$$

Hier bedeuten die Coefficienten zu x, y, z den Inhalt der Projectionen der Figur M auf die Ebenen der yz, zx und xy (§. 35.), die Constante aber bedeutet den dreifachen Inhalt der Pyramide, welche die Figur M zur Grundfläche und den Punkt o zur Spitze hat. Die Gleichung drückt also ganz allgemein folgenden Satz aus.

„Man nehme in der schiefen Ebene irgend eine Figur an, und projicire sie auf die Coordinaten-Ebenen. Darauf nehme man in der schiefen Ebene einen beliebigen Punkt an, so sind die drei Pyramiden, welche die drei Projectionen der Figur auf die Coordinaten-Ebenen zur Grundfläche und den willkürlichen Punkt in der schiefen Ebene zur Spitze haben, zusammen so groß, als die Pyramide, welche die Figur in der schiefen Ebene zur Grundfläche und den Anfangs-Punkt der Coordinaten zur Spitze hat. Der Satz, den die Gleichung einer durch drei Punkte gehenden Ebene enthält, ist nur ein besonderer Fall dieses allgemeinen Satzes."

Aus demselben läßt sich auch schließen, daß, wenn Δ den Inhalt des durch die drei Punkte p, q, r, p', q', r' und p'', q'', r'' gebildeten Dreiecks in der schiefen Ebene bedeutet, und $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ seine Projectionen auf die Ebenen der yz, zx und xy bedeuten, π hingegen der körperliche Inhalt der Pyramide ist, die das Dreieck Δ zur Grundfläche und den Punkt o zur Spitze hat,

$$91.\quad\begin{cases}\Delta' = q(r'' - r') + q'(r - r'') + q^2(r' - r)\\ \Delta'' = r(p'' - p') + r'(p - p'') + r^2(p' - p)\\ \Delta''' = p(q'' - q') + p'(q - q'') + p''(q' - q)\\ \Pi = p(r'q'' - r''q') + p'(r''q - rq'')\\ \quad + p''(rq' - r'q)\end{cases}$$

seyn müssen. In der That läßt sich dies unmittelbar zeigen, doch muß der Beweis, der weniger hierher gehört, einer andern Abhandlung vorbehalten bleiben.

Die Gleichung (89.)

$$x\cos.B + y\cos.C + z\cos.A = P$$

ist merkwürdig. Sie ist eine Gleichung für die Ebene, die nur den Perpendikel aus dem Punkt o auf sie, und die Winkel enthält, welche die Ebene mit den Coordinaten-Ebenen macht. Ihr Zusammenhang mit der ähnlichen Gleichung (16. §. 11. II.), die den Perpendikel und die Coordinaten seines Durchschnitts-Punktes mit der schiefen Ebene enthält, wird sich weiter unten zeigen.

Von der geraden Linie im Raume.

Von den Gleichungen derselben.

42.

Eine gerade Linie im Raume wird durch drei Gleichungen von der Form

$$92.\quad\begin{cases}\alpha y + \beta x = \alpha\beta\\ \gamma z + \delta y = \gamma\delta\\ \varepsilon x + \zeta z = \varepsilon\zeta\end{cases}$$

bestimmt (§. 12.), welche zugleich die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Coordinaten-Ebenen sind. Je zwei von diesen Gleichungen enthalten die dritte einschließlich, weshalb ein gewisses Verhältniß zwischen den sechs Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ

Statt finden muß. Man findet dieses Verhältniß so. Schafft man nämlich z. B. y, zwischen der ersten und zweiten Gleichung weg, so erhält man

$$\beta\delta x - \gamma\alpha z = \alpha\beta\delta - \gamma\alpha\delta.$$

Schafft man zwischen dieser und der dritten Gleichung $\varepsilon x + \zeta z = \varepsilon\zeta$, z weg, so kommt

$$\beta\zeta\delta x + \varepsilon\gamma\alpha x = \alpha(\beta - \gamma)\delta\zeta + \varepsilon\alpha\gamma\zeta, \text{ also}$$

$$x = \frac{\alpha\zeta(\delta\beta - \delta\gamma + \varepsilon\gamma)}{\beta\zeta\delta + \varepsilon\gamma\alpha}.$$

Diese Gleichung gilt für ein beliebiges x, also auch für $x = 0$, folglich ist

$$\delta\beta - \delta\gamma + \varepsilon\gamma = 0.$$

Eben so findet man, wenn man die Gleichungen sucht, die nur y und z allein enthalten,

$$\alpha\varepsilon + \delta\zeta - \varepsilon\zeta = 0 \text{ und } \alpha\gamma + \beta\zeta - \alpha\beta = 0.$$

Diese drei Gleichungen

$$93. \quad \begin{cases} \delta\beta + \varepsilon\gamma - \delta\gamma = 0 \\ \zeta\delta + \alpha\varepsilon - \zeta\varepsilon = 0 \\ \beta\zeta + \gamma\alpha - \beta\alpha = 0 \end{cases}$$

drücken die Verhältnisse aus, welche zwischen den sechs Coefficienten α, β, γ, δ, ε und ζ Statt finden müssen, damit die drei Gleichungen (92.) eine und dieselbe gerade Linie im Raume bedeuten.

Zwei von diesen Bedingungs-Gleichungen enthalten wiederum die dritte, denn z. B. die erste ist

$$\delta(\beta - \gamma)) + \varepsilon\gamma = 0, \text{ die zweite ist}$$
$$\delta\zeta + \varepsilon(\alpha - \zeta) = 0.$$

Schafft man zwischen diesen beiden Gleichungen z. B. die Größe δ weg, so kommt

$$\varepsilon\zeta\gamma - \varepsilon(\alpha - \zeta)(\beta - \gamma) = 0, \text{ oder}$$
$$\zeta\gamma - \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\zeta - \zeta\gamma = 0, \text{ oder}$$
$$\beta\zeta + \gamma\alpha - \beta\alpha = 0,$$

welches die dritte von den drei Gleichungen (93.) ist. Dieses muß auch nothwendig so seyn, denn zwei von den drei Gleichungen (92.), also vier von den sechs Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ sind zur Bestimmung einer geraden Linie im Raume nöthig. Folglich kann es nicht drei Bedingungs-Gleichungen für die sechs Coefficienten, sondern nur zwei geben, weil sonst nicht vier, sondern nur drei Coefficienten von einander unabhängig seyn würden.

Folgender Ausdruck für das Verhältniß zwischen den sechs Coefficienten ist ebenfalls merkwürdig. Die erste Gleichung (93.) ist nämlich $\varepsilon\gamma = \delta(\gamma - \beta)$. Die dritte Gleichung ist $\beta\zeta = \alpha(\beta - \gamma)$. Dividirt man Eines durch das Andere, so kömmt $\frac{\varepsilon\gamma}{\beta\zeta} = -\frac{\delta}{\alpha}$ oder

$$94. \quad \alpha\gamma\varepsilon = -\beta\delta\zeta.$$

Diese Gleichung drückt Folgendes aus. Die Gleichungen (92.) sind nämlich diejenigen der Projectionen der Linie im Raume auf die Coordinaten-Ebenen, also sind die Größen α, β, γ, δ, ε, ζ die Entfernungen, in welchen diese Projectionen die Axen schneiden. Legte man also eine schiefe Ebene durch die drei Punkte, in welchen die erste Projection die Axe der x, die andere die Axe der y, die dritte die Axe der z schneidet, so ist der sechsfache Inhalt der Pyramide, welche diese schiefe Ebene mit den Coordinaten-Ebenen einschließt, $= \alpha\gamma\varepsilon$. Legte man hingegen eine andere schiefe Ebene durch die drei Punkte, in welchen die erste Projection die Axe der y, die andere die Axe der z, die dritte die Axe der x schneidet, so ist der sechsfache Inhalt der Pyramide, welche diese zweite schiefe Ebene mit den Coordinaten-Ebenen einschließt, $= \beta\delta\zeta$. Da nun nach (94.) $\alpha\gamma\varepsilon = -\beta\delta\zeta$, so ist der Inhalt jener beiden Pyramiden gleich groß. Das entgegengesetzte Zeichen bezieht sich auf die Lage und hat keinen Einfluß auf die Größe.

Wenn eine gerade Linie im Raume durch einen bestimmten Punkt geht.

43.

Wenn eine gerade Linie im Raume durch den gegebenen Punkt p, q, r geht, so sind ihre Gleichungen

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta,\ \gamma z + \delta y = \gamma\delta \text{ und } \varepsilon x + \zeta z = \varepsilon\zeta$$

für diesen Punkt

$$\alpha q + \beta p = \alpha\beta,\ \gamma r + \delta q = \gamma\delta \text{ und } \varepsilon p + \zeta r = \varepsilon\zeta.$$

Zieht man die letzten drei Gleichungen von den drei ersten ab, so kommt

$$95.\quad \begin{cases} \alpha(y-q) + \beta(x-p) = 0 \\ \gamma(z-r) + \delta(y-q) = 0 \\ \varepsilon(x-p) + \zeta(z-r) = 0 \end{cases}$$

welches die Gleichungen einer geraden Linie im Raume sind, die durch einen gegebenen Punkt p, q, r geht. Zwei von den Gleichungen enthalten wiederum allemal die dritte.

Wenn eine gerade Linie im Raume durch zwei bestimmte Punkte geht.

44.

Soll eine gerade Linie im Raume durch zwei gegebene Punkte p, q, r und p′, q′, r′ gehen, so muß zuerst, damit die Linie durch den ersten Punkt geht, vermöge (§. 43.)

$$\alpha(y-q) + \beta(x-p) = 0,\ \gamma(z-r) + \delta(y-q) = 0,$$
$$\varepsilon(x-p) + \zeta(z-r) = 0$$

seyn, und damit sie durch den zweiten Punkt geht,

$$\alpha(y-q') + \beta(x-p') = 0,\ \gamma(z-r') + \delta(y-q') = 0,$$
$$\varepsilon(x-p') + \zeta(z-r') = 0.$$

Verbindet man die drei ersten Gleichungen mit den drei letzten, so kommt

$$\frac{x-p}{x-p'}=\frac{y-q}{y-q'},\ \frac{y-q}{y-q'}=\frac{z-r}{z-r'},\ \frac{z-r}{z-r'}=\frac{x-p}{x-p'}.$$

Dieses gibt, wenn man die Nenner wegschafft,

$$96.\ \begin{cases}(p'-p)y-(q'-q)x=p'q-pq'\\(q'-q)z-(r'-r)y=q'r-qr'\\(r'-r)x-(p'-p)z=r'p-rp',\end{cases}$$

welches die Gleichungen einer geraden Linie im Raume sind, die durch die beiden Punkte p, q, r und p', q', r' geht.

Die Linie ist, wie gehörig, durch diese beiden Punkte völlig bestimmt, denn die Gleichungen (96.) enthalten keine willkürliche Coefficienten mehr, sondern nur die bestimmten Größen p, q, r und p', q', r'.

Wenn eine gerade Linie im Raume durch den Anfangs-Punkt der Coordinaten geht.

45.

Für eine gerade Linie im Raume, die durch den Punkt o geht, bringe man die allgemeinen Gleichungen (92.) auf die Gestalt

$$\frac{\alpha}{\beta}y+x=\alpha,\ \frac{\gamma}{\delta}z+y=\gamma,\ \frac{\varepsilon}{\zeta}x+z=\varepsilon,$$

und nenne

$$97.\ \frac{\alpha}{\beta}=\varkappa,\ \frac{\gamma}{\delta}=\mu,\ \frac{\varepsilon}{\zeta}=\nu,$$

so daß die Gleichungen zu folgenden werden:

$$98.\ \varkappa y+x=\alpha,\ \mu z+y=\gamma,\ \nu x+z=\varepsilon,$$

so ist hier $\alpha=0$, $\gamma=0$, $\varepsilon=0$, folglich

$$99.\ \varkappa y+x=0,\ \mu z+y=0,\ \nu x+z=0,$$

welches die Gleichungen einer geraden Linie im Raume sind, die durch den Punkt o geht.

Von den Winkeln zwischen den Projectionen einer geraden Linie im Raume und den Axen.

Die Coefficienten $\varkappa$, μ, ν sind die Tangenten der Winkel, welche die Projectionen der Linie auf die Ebenen der xy, der yz und der zx mit den Axen der y, der z und der x machen, und weil $\alpha\gamma\varepsilon = -\beta\delta z$ (94.), so ist aus (97.)

$$100. \quad \varkappa\mu\nu = -1.$$

Diese Gleichung ist derjenigen $kmn = 1$ ähnlich, welche bei der Ebene, für die Tangenten der Winkel zwischen ihren Durchschnitten mit den Coordinaten-Ebenen und den Axen, Statt findet. Es ist merkwürdig, daß für die Ebene $kmn = +1$ und für die gerade Linie im Raume $\varkappa\mu\nu = -1$ ist.

Wenn eine gerade Linie im Raume durch den Anfangs-Punkt der Coordinaten und einen zweiten bestimmten Punkt geht.

46.

Soll eine gerade Linie im Raume durch den Punkt o und zugleich noch durch einen andern Punkt p, q, r gehen, so ist in (96.) $p' = 0$, $q' = 0$ und $r' = 0$, also ist

$$101. \quad \begin{cases} py + qx = 0 \\ qz + ry = 0 \\ rx + pz = 0, \end{cases}$$

welches in diesem Falle die drei Gleichungen der Linie sind.

Wenn eine gerade Linie im Raume mit einer der Coordinaten-Ebenen parallel ist.

47.

Ist eine gerade Linie im Raume z. B. mit der Ebene der xz parallel, so ist ihre Projection auf die andern beiden Ebenen

mit den Axen der x und der z parallel, also ist in diesem Falle $\alpha = \infty$ und $\delta = \infty$ und die Gleichungen der Linie sind

$$y = \beta,\ y = \gamma \text{ und } z = \varepsilon x + \zeta z = \varepsilon \zeta,$$

folglich ist $\beta = \gamma$ und

$$102.\quad y = \beta = \gamma \text{ und } \varepsilon x + \zeta z = \varepsilon \zeta,$$

welches die beiden Gleichungen einer, mit der Ebene xz parallelen Linie im Raume sind.

Wenn eine gerade Linie im Raume mit einer Axe parallel ist.

48.

Ist eine gerade Linie im Raume, z. B. mit der Axe der x parallel, so ist auch noch $\zeta = \infty$, und die Gleichungen der Linie sind

$$103.\quad y = \beta = \gamma \text{ und } \zeta = \varepsilon.$$

Von dem Durchschnitte einer geraden Linie im Raume mit den Coordinaten-Ebenen.

49.

Ein gerade Linie im Raume, die mit keiner der drei Coordinaten-Ebenen parallel ist, schneidet sie nothwendig alle drei. Die drei Arten, wie dies geschieht, finden sich aus den Gleichungen der Linie

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta,\ \gamma z + \delta y = \gamma\delta,\ \varepsilon x + \zeta z = \varepsilon\zeta.$$

Die erste Gleichung ist diejenige der Projection der Linie auf die Ebene der xy. Setzt man in diese Gleichung $y = 0$, so kommt $\beta x = \alpha\beta$ oder $x = \alpha$, welches also die Entfernung vom Punkt o ist, in welcher die Projection der Linie auf die Ebene der xy die Axe der x schneidet. In derselben Entfernung von der Axe der z schneidet eine durch die Linie gehende, auf die Ebene der xy senkrechte Ebene, die Ebene der xz, denn die Gleichung $\alpha y + \beta x = \alpha\beta$ drückt eben sowohl eine solche

senkrechte Ebene, als die Projection der Linie aus. Nun aber befindet sich in dieser senkrechten Ebene die gegebene Linie im Raume, folglich schneidet solche die Ebene der xz in der Entfernung α von der Axe der z. Eben so findet man, daß sie die Ebene der yz in der Entfernung β von der Axe der z schneidet. Ueberhaupt also bedeuten:

α und β die Entfernungen von der Axe der z, in welcher die Linie im Raume die Ebenen der xz und yz schneidet;

γ und δ die Entfernungen von der Axe der z, in welcher die Linie die Ebenen der yx und zx schneidet;

ε und ζ die Entfernungen von der Axe der y, in welcher die Linie die Ebenen der zy und xy schneidet.

Folglich sind α und δ die Coordinaten des Punktes, in welchem die Linie im Raume die Ebene der xz schneidet,

β und ε die Coordinaten des Punktes, in welchem sie die Ebene der zy schneidet, und

γ und ζ die Coordinaten des Punktes, in welchem sie die Ebene der yx schneidet.

Ist die Linie mit einer der Ebenen, z. B. mit der Ebene der xz parallel, so schneidet sie dieselbe gar nicht, also sind in diesem Falle α und $\delta = \infty$.

Ist die Linie mit einer der Axen parallel, z. B. mit der Axe der x, so schneidet sie weder die Ebene der xy, noch die Ebene der xz, folglich sind in diesem Falle α, δ, γ und $\zeta = \infty$, welches beides gehörig mit §. 47. und 48. übereinstimmt.

Perpendikel auf eine Ebene im Raume.

Gleichungen des Perpendikels.

50.

Steht eine gerade Linie im Raume auf einer schiefen Ebene senkrecht, so sind auch ihre Projectionen auf die Coordinaten-Ebenen, und die Durchschnitte der schiefen Ebene mit den Coordinaten-Ebenen, auf einander senkrecht. Denn es liege z. B.

eine Ebene durch die gegebene Linie im Raume und auf die Ebene der xy senkrecht, so ist diese Ebene zugleich auf die schiefe Ebene senkrecht; denn die gegebene Linie im Raume, die ein Perpendikel auf die schiefe Ebene ist, befindet sich in ihr. Diese senkrechte Ebene also steht, weil sie auf beiden Ebenen zugleich senkrecht ist, auch auf ihren Durchschnitten perpendiculär, mithin steht jede Linie in ihr auf diesem Durchschnitt senkrecht, folglich auch der Durchschnitt der perpendiculären Ebene mit der Ebene der xy, weil derselbe eine Linie in der perpendiculären Ebene ist.

Sind nun die Gleichungen der Linie im Raume

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta, \quad \gamma z + \delta y = \gamma\delta, \quad \varepsilon x + \zeta z = \varepsilon\zeta,$$

und die Gleichung der schiefen Ebene ist

$$abz + bcx + cay = abc,$$

so ist die Gleichung des Durchschnitts der durch die Linie im Raume gehenden und auf der Ebene der xy senkrechten Ebene mit der Ebene der xy, weil dieser Durchschnitt nichts anders ist, als die Projection der Linie im Raume auf die Ebene der xy, folgende:

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta;$$

hingegen die Gleichung des Durchschnitts der schiefen Ebene mit derjenigen der xy ist

$$ay + bx = ab.$$

Die geraden Linien, welche diese beiden Gleichungen ausdrücken, sollen nun auf einander senkrecht seyn. Die Gleichung eines Perpendikels auf die gerade Linie

$$ay + bx = ab \text{ oder } y + \frac{b}{a}x = b \text{ ist}$$

$$y - \frac{a}{b}x = b' \quad (27. \text{ §. } 17.)$$

Damit also hier die Linie $\alpha y + \beta x = \alpha\beta$ oder $y + \frac{\beta}{\alpha}x = \beta$ auf $ay + bx = ab$ perpendiculär sey, muß seyn $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{a}{b}$ und $\beta = b'$, also ist die Gleichung des Perpendikels auf $ay + bx = ab$,

$$y - \frac{a}{b}x = \beta \text{ oder } by - ax = b\beta.$$

Diese also ist die Gleichung der Projection der, im Raume, auf die schiefe Ebene senkrechten geraden Linie auf die Ebene der xy. Die Gleichung der Projectionen des Perpendikels im Raume auf die andern Coordinaten-Ebenen findet man eben so. Folglich sind

$$104. \begin{cases} by - ax = b\beta \text{ oder } ky - x = \beta \\ cz - by = c\delta \text{ oder } mz - y = \delta \\ ax - cz = a\zeta \text{ oder } nx - z = \zeta. \end{cases}$$

die Gleichungen einer auf der schiefen Ebene $abz + bcx + cay = abc$ senkrechten geraden Linie im Raume.

Coordinaten des Durchschnitts-Punkts einer Ebene mit einem Perpendikel auf ihr.

51.

Für den Durchschnitts-Punkt der schiefen Ebene und ihres Perpendikels passen sowohl die Gleichungen des Perpendikels, als der Ebene. Heißen daher seine Coordinaten x', y' und z', so ist zugleich

$$by' - ax' = b\beta,\ cz' - by' = c\delta,\ ax' - cz' = a\zeta \text{ und}$$
$$abz' + bcx' + cay' = abc.$$

Schafft man zwischen der ersten und vierten Gleichung x' weg, so erhält man $b^2cy' + a^2bz' + a^2cy' = b^2c\beta + a^2bc$, oder $(a^2 + b^2)cy' + a^2bz' = bc(b\beta + a^2)$. Schafft man zwischen dieser und der zweiten Gleichung y weg, so erhält man

$$a^2b^2z' + (a^2 + b^2)c^2z' = b^2c(b\beta + a^2) + c^2\delta(a^2 + b^2),$$

also ist

$$105. \begin{cases} z' = c.\dfrac{a^2b^2 + b^3\beta + c^2\delta(a^2 + b^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \text{ und daraus} \\ x' = a.\dfrac{b^2c^2 + c^3\delta + a\zeta(b^2 + c^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ y' = b.\dfrac{c^2a^2 + a^3\zeta + b\beta(c^2 + a^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \end{cases}$$

welches die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts einer Ebene $abz + bcx + cay$ mit einer auf ihr senkrechten Linie im Raume sind.

Wenn das Perpendikel auf eine Ebene zugleich durch einen bestimmten Punkt geht.

52.

Soll das Perpendikel auf eine schiefe Ebene zugleich durch den Punkt p, q, r gehen, so geben seine Gleichungen

$$by - ax = b\beta,\ cz - by = c\delta,\ ax - cz = a\zeta\ (104.)$$

für diesen Punkt

$$bq - ap = q\beta,\ cr - bq = c\delta,\ ap - cr = a\zeta$$

zieht man die drei letzten Gleichungen von den drei ersten ab, so kommt

$$106.\ \begin{cases} b(y-q) - a(x-p) = 0 \\ c(z-r) - b(y-q) = 0 \\ a(x-p) - c(z-r) = 0 \end{cases}$$

welches die Gleichungen eines durch den Punkt p, p, r gehenden Perpendikels auf die Ebene $abz + bcx + cay = abc$ sind. Diese Gleichungen enthalten keine willkürliche Größe mehr, sondern nur die bestimmten Größen p, q, r und a, b, c. Die Lage des Perpendikels ist also, wie es sich wirklich verhält, völlig bestimmt.

Die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts des Perpendikels mit der schiefen Ebene findet man, wie in der vorigen Nummer. Denn wenn dieselben x', y' und z' heißen, so ist gleichzeitig

$$b(y'-q) - a(x'-p) = 0,\ c(z'-r) - b(y'-q) = 0,$$
$$a(x'-p) - c(z'-r) = 0\ (106.),\ \text{oder}$$

$$by' - ax' = bq - ap,\ cz' - by' = cr - bq,$$
$$ax' - cz' = ap - cr\ \text{und}$$
$$abz' + bcx' + cay' = abc.$$

Schafft man zwischen der ersten und vierten Gleichung x' weg, so kommt

$$b^2cy' + a^2bz' + a^2cy' = bc(bq - ap) + a^2bc\ \text{oder}$$
$$a^2bz' + c(a^2 + b^2)y' = bc(a^2 + bq - ap).$$

Schafft man zwischen dieser Gleichung und der zweiten y' weg, so erhält man

$$a^2 b^2 z + c^2 (a^2 + b^2) z' = b^2 c (a^2 + bq - ap) + (cr - pq) c (a^2 + b^2)$$

oder

$$(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) z' = c^2 (a^2 + b^2) r - abc (bp + aq) + a^2 b^2 c,$$

also

$$107. \quad \begin{cases} z' = \dfrac{c^2 (a^2 + b^2) r + abc (ab - aq - bp)}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \\[2ex] x' = \dfrac{a^2 (b^2 + c^2) p + abc (bc - br - cq)}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \\[2ex] y' = \dfrac{b^2 (c^2 + a^2) q + abc (ca - cp - ar)}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \end{cases}$$

welches die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts der schiefen Ebene mit einem Perpendikel sind, der zugleich durch den Punkt p, q, r geht.

Die Länge des Perpendikels von dem Punkt p, q, r bis zu seinem Durchschnitts-Punkte mit der Ebene ist

$$108. \quad P = \sqrt{[(x' - p)^2 + (y' - q)^2 + (z' - r)^2]}$$

Man könnte also die Länge mittelst der Formeln (107.) ausdrücken. Dieselbe ist indessen schon in §. 36. kürzer gefunden worden.

Ist der Punkt p, q, r, durch welchen das Perpendikel gehen soll, der Anfangs-Punkt der Coordinaten, so sind in diesem Falle $p, q, r = 0$, also ist

$$z' = \frac{a^2 b^2 c}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \quad x' = \frac{b^2 c^2 a}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

$$y' = \frac{c^2 a^2 b}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

Also ist $cz' = ax' = by'$, folglich verhalten sich diese Coordinaten umgekehrt, wie die Größen a, b, c. Die Länge des Perpendikels ist in diesem Falle $P = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$, welches, wie leicht zu sehen, gibt

$$P = \frac{abc}{\sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + b^2 a^2)}}, \text{ wie } (76. \text{ §. } 36.)$$

Ebene, welche auf einer gegebenen geraden Linie im Raume senkrecht steht.

53.

In §. 51. und 52. wurde die gerade Linie im Raume gesucht, die auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht. Man kann umgekehrt die Ebene verlangen, die auf einer gegebenen geraden Linie im Raume senkrecht ist. Die Projectionen der Linie auf die Coordinaten-Ebenen und die Durchschnitte der schiefen Ebene mit den Coordinaten-Ebenen sind, wie vorhin, unter-einander perpendiculär. Die Gleichung der Projection der geraden Linie im Raume auf die Ebene der xy war $y + \frac{\beta}{\alpha}x = \beta$, die Gleichung des Durchschnitts der schiefen Ebene mit der Ebene der xy war $y + \frac{b}{a}x = b$, und damit beide auf einander senkrecht sind, mußte seyn $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{a}{b}$ (§. 51.), also auch $\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{b}{c}$, $\frac{\zeta}{\varepsilon} = -\frac{c}{a}$. Man darf also nur in die Gleichung der Ebene $z + \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y = c$, $-\frac{\zeta}{\varepsilon}$ statt $\frac{c}{a}$ und $-\frac{\gamma}{\delta}$ statt $\frac{c}{b}$ setzen. Dieses gibt $z - \frac{\zeta}{\varepsilon}x - \frac{\gamma}{\delta}y = 0$ oder

$$109.\quad \varepsilon\delta z - \zeta\delta x - \gamma\varepsilon y = \delta\varepsilon c,$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die auf der geraden Linie im Raume $\alpha y + \beta x = \alpha\beta$, $\gamma z + \delta y = \gamma\delta$ und $\varepsilon x + \zeta z = \varepsilon\zeta$ senkrecht steht.

Geht die gegebene Linie durch den Punkt o, so bringe man die Gleichung (109.) auf die Gestalt $z - \frac{\zeta}{\varepsilon}x - \frac{\gamma}{\delta}y = c$ und schreibe gemäß (97.) μ statt $\frac{\gamma}{\delta}$ und $\frac{1}{\nu}$ statt $\frac{\zeta}{\varepsilon}$, so ist

$z - \frac{x}{\nu} - \mu y = c$, oder, weil $\varkappa\mu\nu = -1$, also $\frac{1}{\nu} = -\varkappa\mu$

$$110. \begin{cases} z + \varkappa\mu x - \mu y = c, \text{ oder auch} \\ x + \mu\nu y - \nu z = a \\ y + \nu\varkappa z - \varkappa x = b, \end{cases}$$

welches die Gleichungen der Ebene sind, die auf einer gegebenen, durch den Punkt o gehenden geraden Linie im Raume senkrecht steht.

Wenn die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts der Ebene mit der Linie wiederum x', y', z' heißen, so ist für den Durchschnitts-Punkt gleichzeitig $\varepsilon\delta z' - \zeta\delta x' - \gamma\varepsilon y' = \delta\varepsilon c$ und $\gamma z' + \delta y = \delta\gamma$, $\varepsilon x' + \zeta z' = \varepsilon\zeta$.

Schafft man zwischen der ersten und zweiten Gleichung y' weg, so kommt

$$\varepsilon\delta^2 z' - \delta^2\zeta x' + \gamma^2\varepsilon z = \gamma\delta\varepsilon c + \gamma^2\delta\varepsilon \text{ oder}$$
$$\varepsilon(\gamma^2 + \delta^2) z' - \delta^2\zeta x' = \gamma\delta\varepsilon(c + \gamma).$$

Schafft man zwischen dieser und der dritten Gleichung x' weg, so kommt

$$\delta^2\zeta^2 z' + \varepsilon^2(\gamma^2 + \delta^2) z' = \delta^2\zeta^2\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon^2(c + \gamma)$$

also ist

$$111. \begin{cases} z' = \delta\varepsilon \dfrac{\zeta^2\delta + \gamma^2\varepsilon + \gamma\delta c}{\delta^2\zeta^2 + \varepsilon^2\gamma^2 + \varepsilon^2\delta^2} \text{ und daraus} \\ x' = \zeta\alpha \dfrac{\beta^2\zeta + \varepsilon^2\alpha + \varepsilon\zeta a}{\zeta^2\beta^2 + \alpha^2\varepsilon^2 + \alpha^2\zeta^2} \\ y' = \beta\gamma \dfrac{\delta^2\beta + \alpha^2\gamma + \zeta\beta b}{\beta^2\delta^2 + \gamma^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}, \end{cases}$$

welches die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts der Linie im Raume mit der auf ihr senkrechten Ebene sind.

Wenn die auf einer gegebenen geraden Linie, im Raume senkrechte Ebene, zugleich durch einen gegebenen Punkt geht.

54.

Soll die Ebene zugleich durch den Punkt p, q, r gehen, so ist ihre Gleichung $\varepsilon\delta z - \zeta\delta x - \gamma\varepsilon y = \delta\varepsilon c$, für diesen Punkt $\varepsilon\delta r - \zeta\delta p - \gamma\varepsilon q = \delta\varepsilon c$.

Zieht man Eines von dem Andern ab, so kommt

$$112. \quad \varepsilon\delta(z-r)-\zeta\delta(x-p)-\gamma\varepsilon(y-q)=0,$$

welches die verlangte Gleichung der Ebene ist, die zugleich durch den Punkt p, q, r geht.

Die Coordinaten x', y', z' des Durchschnitts-Punkts der Ebene und der Linie findet man, wie in der vorigen Nummer. Es ist nämlich zugleich

$$\varepsilon\delta z'-\zeta\delta x'-\gamma\varepsilon y'=\varepsilon\delta r-\zeta\delta p-\gamma\varepsilon q \text{ und}$$
$$\gamma z'+\delta y'=\delta\gamma,\ \varepsilon x'+\zeta z'=\varepsilon\zeta.$$

Schafft man zwischen der ersten und zweiten dieser Gleichungen y' weg, so kommt

$$\varepsilon\delta^2 z'-\zeta\delta^2 x'+\gamma^2\varepsilon z'=\varepsilon\delta^2 r-\zeta\delta^2 p-\gamma\varepsilon\delta q+\gamma^2\varepsilon\delta \text{ oder}$$
$$\varepsilon(\gamma^2+\delta^2)z'-\zeta\delta^2 x'=\varepsilon\delta^2 r-\zeta\delta^2 p-\gamma\varepsilon\delta q+\gamma^2\varepsilon\delta.$$

Schafft man zwischen dieser und der dritten Gleichung noch x' weg, so kommt

$$\varepsilon^2(\gamma^2+\delta^2)z'+\zeta^2\delta^2 z'=\varepsilon^2\delta^2 r-\zeta\varepsilon\delta^2 p-\gamma\varepsilon^2\delta q+\gamma^2\varepsilon^2\delta$$
$$+\varepsilon\zeta^2\delta^2, \text{ also ist}$$

$$113. \quad \begin{cases} z'=\varepsilon\delta.\dfrac{\gamma^2\varepsilon+\zeta^2\delta+\varepsilon\delta r-\zeta\delta p-\gamma\varepsilon q}{\varepsilon^2\gamma^2+\varepsilon^2\delta^2+\zeta^2\delta^2} \\ \text{und daraus} \\ x'=\alpha\zeta.\dfrac{\varepsilon^2\zeta+\beta^2\zeta+\alpha\zeta p-\beta\zeta q-\varepsilon\alpha q}{\zeta^2\varepsilon^2+\alpha^2\zeta^2+\beta^2\zeta^2} \\ y'=\gamma\beta.\dfrac{\alpha^2\beta+\delta^2\beta+\gamma\beta q-\delta\beta r-\alpha\gamma r}{\beta^2\alpha^2+\gamma^2\beta^2+\delta^2\beta^2} \end{cases}$$

welches die Coordinaten des Punkts sind, in welchem die auf einer gegebenen Linie senkrechte und zugleich durch den Punkt p, q, r gehende Ebene die Linie schneidet.

Ist der Punkt p, q, r der Anfangs-Punkt der Coordinaten, so sind p, q, r = 0. Also ist aus (112.)

$$114. \quad \varepsilon\delta z-\zeta\delta x-\gamma\varepsilon y=0$$

welches die Gleichung der auf der gegebenen Linie durch den Punkt o senkrechten Ebene ist.

Das Nämliche findet man aus (110.), weil daselbst jetzt $c = 0$. Die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts finden sich aus (113.), wenn man daselbst $p, q, r = 0$ setzt.

Geht die gegebene Linie durch den Punkt o und die Ebene durch den Punkt p, q, r, so ist für diesen Punkt aus (110.) $r + \varkappa\mu p - \mu q = 0$. Zieht man dieses von (110.) ab, so kommt

$$115. \left\{\begin{array}{l} z - r + \varkappa\mu(x-p) - \mu(y-q) = 0 \text{ oder auch} \\ x - p + \mu\nu(y-q) - \nu(z-r) = 0 \\ y - q + \nu\varkappa(z-r) - \varkappa(x-p) = 0, \end{array}\right.$$

welches die Gleichungen einer Ebene sind, die durch den Punkt p, q, r geht und zugleich auf einer gegebenen Linie im Raume senkrecht steht, welche durch den Punkt o geht. Geht auch die Ebene durch den Punkt o, so sind noch $p, q, r = 0$, und es ist

$$116. \quad z + \varkappa\mu x - \nu y = 0, \; x + \mu\nu y - \varkappa z = 0, \\ y + \nu\varkappa z - p x = 0.$$

Wenn eine Ebene durch eine gegebene gerade Linie im Raume geht.

55.

Die Gleichungen der Linie müssen in diesem Falle zugleich für die Ebene passen.

Die Gleichung der Ebene sey

$$z + \frac{x}{n} + m y = c.$$

Die Gleichungen der Linie sollen seyn

$$\varkappa y + x = \alpha, \; \mu z + y = \gamma, \; \nu x + z = \varepsilon.$$

Aus der dritten dieser vier Gleichungen ist

$y = \gamma - \mu z$ und aus der vierten.

$$x = \frac{\varepsilon}{\nu} - \frac{z}{\nu} = \varepsilon\frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{z}{\nu} \text{ oder}$$

$$x = \zeta - \frac{z}{\nu}.$$

Setzt man dieses in die Gleichung der Ebene, so kommt

$$z + \frac{\zeta}{n} - \frac{z}{n\nu} + m\gamma - m\mu z = c \text{ oder}$$

$$z\left(1 - \frac{1}{n\nu} - m\mu\right) + \frac{\zeta}{n} + m\gamma - c = 0 \text{ oder}$$

$$z(1 + k m \varkappa \mu - m\mu) + m\left(\frac{\zeta}{nm} + \gamma - \frac{c}{m}\right) = 0,$$

oder, weil $m = \frac{c}{b}$, also $\frac{c}{m} = b$,

$$z(1 - k m \varkappa \mu - m\mu) z + m(k\zeta + \gamma - b) = 0.$$

Dieses gilt für jeden beliebigen Punkt der Ebene, also auch für $z = 0$, folglich muß seyn

$$117. \begin{cases} k\zeta + \gamma = b, \text{ und durch Versetzung der Buchstaben} \\ m\beta + \varepsilon = c \\ n\delta + \alpha = a. \end{cases}$$

Da aber eben deshalb für jeden andern Werth von z, $z(1 - k m \varkappa \mu - m\mu) = 0$ ist, so muß auch seyn

$$118. \begin{cases} 1 - m\mu + m\mu k\varkappa = 0 \\ 1 - n\nu + n\nu m\mu = 0 \\ 1 - k\varkappa + k\varkappa n\nu = 0 \end{cases}$$

Diese Gleichungen (117. u. 118.) enthalten die Bedingungen für die Bestimmungsstücke der Ebene und der Linie, wenn eine gerade Linie in einer Ebene liegt, oder eine Ebene durch eine gerade Linie gehen soll.

Weil $k = \frac{b}{a}$, so folgt aus der ersten Gleichung (117.)

$$\frac{b}{a}\zeta + \gamma = b \text{ oder } \frac{1}{b} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\zeta}{a\gamma}, \text{ und weil}$$

$m = \frac{c}{b}$, $n = \frac{a}{c}$, so folgt aus der ersten Gleichung (118.), welche

$$1 - m\mu + m\mu k\varkappa = 0 \text{ oder } 1 - m\mu + \frac{\varkappa\mu}{n} = 0 \text{ war,}$$

$1 - \frac{c}{b}\mu + \varkappa\mu\frac{c}{a} = 0$ oder $\frac{1}{c} = \frac{\mu}{b} - \frac{\varkappa\mu}{a}$, oder wenn man $\frac{1}{b} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\zeta}{a\gamma}$ substituirt $\frac{1}{c} = \frac{\mu}{\gamma} - \frac{\mu\zeta}{a\gamma} - \frac{\varkappa\mu}{a}$.

Setzt man diese Werthe von $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$ in die Gleichung der Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, so kommt

$$\frac{x}{a} + y\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\zeta}{a\gamma}\right) + z\left(\frac{\mu}{\gamma} - \frac{\mu\zeta}{a\gamma} - \frac{\varkappa\mu}{a}\right) = 1,$$

oder, wenn man mit $a\gamma$ multiplicirt,

$$119. \left\{\begin{array}{l} x\gamma + y(a - \zeta) + z\mu(a - \zeta - \varkappa) = a\gamma \text{ oder} \\ y\varepsilon + z(b - \beta) + x\nu(b - \beta\mu) = b\varepsilon \text{ oder} \\ z\alpha + x(c - \delta) + y\varkappa(c - \delta - \nu) = c\alpha, \end{array}\right.$$

welches also die Gleichungen einer Ebene sind, die durch die Linie

$$\varkappa y + x = \alpha,\ \mu z + y = \gamma,\ \nu x + z = \varepsilon$$

geht.

Aus der ersten Gleichung (117.) folgt $\zeta = \frac{b}{k} - \frac{\gamma}{k}$, oder $\zeta = b.\frac{a}{b} - \frac{\gamma}{1}.\frac{a}{b} = a - \gamma.\frac{a}{b}$, und aus der ersten Gleichung (118.), welche

$$1 - m\mu - \frac{1}{n\nu} = 0 \text{ ist, } \frac{1}{\nu} = n(1 - m\mu)$$

Setzt man dieses in die Gleichung der Linie $x + \frac{z}{\nu} = \frac{\varepsilon}{\nu} = \zeta$, so kommt

$$x + zn(1 - m\mu) = a\left(1 - \frac{\gamma}{b}\right) \text{ oder}$$

$$xb + zn(b - c\mu) = a(b - \gamma), \text{ also sind}$$

$$120. \left\{\begin{array}{l} xb + zn(b - c\mu) = a(b - \gamma) \text{ und} \\ y + \mu z = \gamma \end{array}\right.$$

die Gleichungen einer geraden Linie im Raume, die durch die gegebene Ebene $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ geht.

Parallele Ebenen.

56.

Parallele Ebenen stehen auf einer und derselben geraden Linie zugleich senkrecht; und umgekehrt: Ebenen, die auf einer und derselben geraden Linie senkrecht stehen, sind parallel. Nun bestehen die Bedingungen, unter welchen eine gerade Linie und eine Ebene auf einander senkrecht sind, zufolge (§. 51. u. 53.), darin, daß

$$k=-\varkappa,$$
$$m=-\mu,$$
$$n=-\nu.$$

Sind also die Gleichungen zweier Ebenen, die auf der Linie im Raume:

$$\alpha y+\beta x=\alpha\beta,\ \gamma z+\delta y=\gamma\delta \text{ und } \varepsilon x+\zeta z=\varepsilon\zeta$$

senkrecht stehen

$$z+my+\frac{x}{n}=c \text{ und}$$

$$z+m'y+\frac{x}{n'}=c',$$

so muß eben sowohl

$$k=-\varkappa,\ m=-\mu,\ n=-\nu, \text{ als}$$
$$k'=-\varkappa,\ m'=-\mu,\ n'=-\nu \text{ seyn, folglich sind}$$

$$121.\quad k=k',\ m=m',\ n=n'$$

die Bedingungen für die Coefficienten a, b, c und a', b' c', wenn die beiden Ebenen parallel seyn sollen.

Die Gleichung der Ebene, welche mit der Ebene $z+my+\frac{x}{n}=c$ oder

$$abz+bcx+acy=abc \text{ parallel läuft, ist}$$

$$122.\quad \begin{cases} z + my + \dfrac{x}{n} = c', \text{ oder} \\ x + nz + \dfrac{y}{k} = a' \text{ oder} \\ y + kx + \dfrac{z}{m} = b' \text{ oder} \\ abz + bcx + acy = abc' = bca' = cab' \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (121.) folgt, daß die Bedingung, wenn zwei Ebenen parallel seyn sollen, darin besteht, daß ihre Durchschnitte mit den Coordinaten-Ebenen parallel sind, denn k, m, n sind die Tangenten der Winkel, welche die Durchschnitte der schiefen Ebene und der Ebenen der xy, der yz und zx mit den Axen der x, der y und der z machen.

Parallele gerade Linien im Raume.

57.

Parallele gerade Linien im Raume sind auf einer und derselben Ebene zugleich senkrecht und umgekehrt. Gerade Linien im Raume, die auf einer und derselben Ebene senkrecht sind, laufen parallel.

Wie vorhin, sind die Bedingungen, unter welchen eine gerade Linie und eine Ebene auf einander senkrecht stehen,

$$k = -\varkappa,\ m = -\mu,\ n = -\nu.$$

Sind also die Gleichungen zweier geraden Linien im Raume, welche beide auf der Ebene

$$abz + bcx + cay = abc$$

zugleich senkrecht stehen

$$\varkappa y + x = \alpha,\ \mu z + y = \gamma,\ \nu x + z = \varepsilon$$
$$\varkappa' y + x = \alpha',\ \mu' z + y = \gamma',\ \nu' x + z = \varepsilon',$$

so muß eben sowohl

$$k = -\varkappa,\ m = -\mu,\ n = -\nu, \text{ als}$$
$$k = -\varkappa',\ m = -\mu',\ n = -\nu' \text{ seyn,}$$

folglich sind

$$\varkappa = \varkappa', \mu = \mu', \nu = \nu'$$

die Bedingungen für die Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ und α', β', γ', δ', ε', ζ', wenn die Linien parallel seyn sollen.

Die Gleichungen der geraden Linie im Raume, welche mit der Linie

$$\varkappa y + x = \alpha, \mu z + y = \gamma, \nu x + z = \varepsilon$$

parallel läuft, ist

$$123. \quad \varkappa y + x = \alpha', \mu z + y = \gamma', \nu x + z = \varepsilon'.$$

Aus den Gleichungen (123.) folgt, daß die Bedingungen, unter welchen zwei gerade Linien im Raume parallel sind, darin bestehen, daß die Projectionen der Linien auf die Coordinaten-Ebenen ebenfalls parallel seyn müssen, denn $\varkappa$, μ, ν sind die Tangenten der Winkel, welche die Projectionen der Linie auf die Ebenen der xy, yz und zx mit den Axen der y, z und x machen.

Wenn eine Ebene und eine gerade Linie im Raume parallel sind.

58.

Eine gerade Linie im Raume ist mit einer gegebenen Ebene parallel, wenn sie in einer andern Ebene liegt, die mit der gegebenen parallel ist.

Die Gleichungen der Linie sollen seyn

$$\varkappa y + x = \alpha, \mu z + y = \gamma, \nu x + z = \varepsilon,$$

die Gleichung einer Ebene durch die Linie sey

$$z + \frac{x}{n} + my = c',$$

die Gleichung der mit dieser parallelen Ebene sey

$$z + \frac{x}{n} + my = c,$$

so sind die Bedingungen, unter welchen die Linie in der ersten Ebene liegt,

$$b' = k'\zeta + \gamma$$

und $1 + \varkappa k' \mu m' - m' \mu = 0$ (117. und 118.). Die Bedingungen aber, unter welchen die beiden Ebenen mit einander parallel laufen, sind

$$k = k', \; m = m', \; n = n' \; (121.)$$

Verbindet man die letzten Bedingungen mit den ersten, so werden diese

$$124. \begin{cases} b' = k\zeta + \gamma \text{ und} \\ 1 = -km\varkappa\mu + m\mu. \end{cases}$$

Diese Bedingungen also müssen erfüllet werden, wenn die Linie und die Ebene $z + \frac{x}{n} + my = c$ parallel seyn sollen. Die erste dieser Bedingungs-Gleichungen enthält noch eine willkürliche Größe b', wie es auch seyn muß; denn mit derselben geraden Linie können unzählige verschiedene Ebenen und mit derselben Ebene unzählige verschiedene gerade Linien parallel seyn.

Ebene, die mit zwei geraden Linien im Raume zugleich parallel ist.

59.

Eine und dieselbe Ebene kann mit zwei verschiedenen geraden Linien im Raume zugleich parallel seyn. Denn wenn die Gleichungen der beiden Linien

$$\varkappa y + x = \alpha, \; \mu z + y = \gamma, \; \nu x + z = \varepsilon$$
$$\varkappa y' + x = \alpha', \; \mu' z + y = \gamma', \; \nu' x + z = \varepsilon'$$

sind, so sind, zufolge (124.) in der vorigen Nummer, die Bedingungen, damit die Ebene mit der einen und der andern Linie parallel sey,

$$b' = k\zeta + \gamma, \; 1 = -km\varkappa\mu + m\mu \text{ und}$$
$$b'' = k\zeta' + \gamma', \; 1 = -km\varkappa'\mu' + m\mu'.$$

Zieht man die vierte von der zweiten Gleichung ab, so kommt

$$o = -km(\varkappa\mu - \varkappa'\mu') + m(\mu - \mu'), \text{ oder, weil}$$

$\varkappa\mu = -\frac{1}{\nu}$, $\varkappa'\mu' = -\frac{1}{\nu'}$ ist, $o = -k\left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right)$

$+(\mu - \mu') = -\varkappa . \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} + \mu - \mu'$, also

$$125. \begin{cases} k = + \frac{\mu - \mu'}{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'} \text{ oder } k = \nu\nu' \frac{\mu - \mu'}{\nu - \nu'} \\ m = + \frac{\nu - \nu'}{\mu\nu - \mu'\nu'} \text{ oder } m = \varkappa\varkappa' \frac{\nu - \nu'}{\varkappa - \varkappa'} \\ n = + \frac{\varkappa - \varkappa'}{\nu\varkappa - \nu'\varkappa'} \text{ oder } n = \mu\mu' \frac{\varkappa - \varkappa'}{\mu - \mu'} \end{cases}$$

hieraus folgt auch, weil $kmn = 1$,

$$126. \quad (\varkappa - \varkappa')(\mu - \mu')(\nu - \nu') = (\varkappa\mu - \varkappa'\mu')(\mu\nu - \mu'\nu')(\nu\varkappa - \nu'\varkappa'),$$

und wie gehörig $\varkappa\varkappa'\mu\mu'\nu\nu' = 1$.

Die Größen k, m und n sind die Tangenten der Winkel zwischen den Durchschnitten der schiefen Ebene mit den Coordinaten-Ebenen und den Axen, die also die Lage einer Ebene im Raume bestimmen, wenn auch nicht ihren Ort. Da nun hier k, m und n ganz durch $\varkappa$, μ, ν und $\varkappa'$, μ', ν' ausgedrückt werden, so folgt, daß zwar unzählige Ebenen möglich sind, die alle mit den nämlichen zwei geraden Linien im Raume parallel laufen, daß aber diese Ebenen alle unter sich parallel sind.

Wenn A, B, C, wie oben, die Winkel bedeuten, welche eine schiefe Ebene mit den Coordinaten-Ebenen macht, so ist z. B.

$$\cos. A = \frac{1}{\sqrt{(1 + m^2 + m^2 k^2)}} \quad (70.) \quad \text{Also ist hier}$$

$$\cos. A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\varkappa\varkappa' \frac{\nu - \nu'}{\varkappa - \varkappa'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu\mu'} \frac{\mu - \mu'}{\varkappa - \varkappa'}\right)^2\right)}}$$

oder

$$\cos.A = \frac{(\varkappa - \varkappa')\mu\mu}{\sqrt{(\mu^2\mu'^2(\varkappa-\varkappa')^2 + (\varkappa\mu\nu\varkappa'\mu' - \varkappa'\mu'\nu'\varkappa\mu)^2 + (\mu-\mu')^2)}}$$

oder

127.

$$\left\{\begin{aligned} \cos.A &= \frac{(\varkappa - \varkappa')\mu\mu'}{\sqrt{[(\mu-\mu')^2 + \mu^2\mu'^2(\varkappa-\varkappa')^2 + (\varkappa\mu - \varkappa'\mu')^2]}} \\ &\text{also auch} \\ \cos.B &= \frac{(\mu - \mu')\nu\nu'}{\sqrt{[(\nu-\nu')^2 + \nu^2\nu'^2(\mu-\mu')^2 + (\mu\nu - \mu'\nu')^2]}} \\ \cos.C &= \frac{(\nu - \nu')\varkappa\varkappa'}{\sqrt{[(\varkappa-\varkappa')^2 + \varkappa^2\varkappa'^2(\nu-\nu')^2 + (\nu\varkappa - \nu'\varkappa')^2]}} \end{aligned}\right.$$

Dieses gibt die Winkel, welche eine mit zwei geraden Linien zugleich parallele Ebene mit der Ebene der xy, yz und zx macht.

Man kann diesen Ausdrücken von cos. A, cos. B und cos. C gleiche Nenner geben, z. B. allen dreien den Nenner von cos. A. Denn der Nenner von cos. B ist wegen $\varkappa\mu\nu = -1$, $\varkappa'\mu'\nu' = -1$,

$$\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\varkappa'\mu'} - \frac{1}{\varkappa\mu}\right)^2 + \frac{1}{\varkappa\mu\varkappa'\mu'}(\mu-\mu')^2 + \left(\frac{1}{\varkappa'} - \frac{1}{\varkappa}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{[(\varkappa\mu - \varkappa'\mu')^2 + (\mu-\mu')^2 + \mu^2\mu'^2(\varkappa-\varkappa')^2]}}{\varkappa\varkappa'\mu\mu'}$$

Der Nenner von cos. C ist

$$\sqrt{\left[(\varkappa-\varkappa')^2 + \varkappa^2\varkappa'^2\left(\frac{1}{\varkappa'\mu'} - \frac{1}{\varkappa\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\mu}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{[\mu^2\mu'^2(\varkappa-\varkappa')^2 + (\varkappa\mu - \varkappa'\mu')^2 + (\mu-\mu')^2]}}{\mu\mu'}$$

welches beides den Nenner von cos. A enthält. Heißt also dieser Nenner N, so ist $\cos. B = \frac{(\mu-\mu')\nu\nu'\varkappa\varkappa'\mu\mu'}{N} = \frac{\mu-\mu'}{N}$

und $\cos. C = \frac{(\nu'-\nu)\varkappa\varkappa'\mu\mu'}{N} = \frac{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'}{N}$, also ist

$$128.\quad \begin{cases} \cos. A = \dfrac{(\varkappa - \varkappa')\mu\mu'}{N} \\ \cos. B = \dfrac{\mu - \mu'}{N} \\ \cos. C = \dfrac{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'}{N} \end{cases}$$

Aus (128.) ist $(\varkappa - \varkappa')\mu\mu' = n(\mu - \mu')$ und $\varkappa\mu - \varkappa'\mu' = \dfrac{\mu - \mu'}{k}$, also ist

$$129.\quad \begin{cases} \cos. A = n.\dfrac{\mu - \mu'}{N} \\ \cos. B = \dfrac{\mu - \mu'}{N} \\ \cos. C = \dfrac{1}{k}.\dfrac{\mu - \mu'}{N} \end{cases}$$

Also ist

$$130.\quad \frac{\cos. A}{\cos. B} = n = \frac{a}{c},\ \frac{\cos. B}{\cos. C} = k = \frac{b}{a},\ \frac{\cos. C}{\cos. A} = m = \frac{c}{b}.$$

Also verhalten sich z. B. die Cosinus der Winkel A und B, welche eine mit zwei geraden Linien im Raume zugleich parallele Ebene mit den Ebenen der xy und yz macht, wie die Entfernungen a und c vom Anfangs-Punkt der Coordinaten, in welchen sie die Axen der x und der z schneidet. Eben so die andern.

Die Gleichung der Ebene ist allgemein

$$\frac{z}{m} + xk + y = b.$$

Setzt man hierin die Werthe von k, m, n aus (125.), so kommt

$$131.\quad z.\frac{\mu\nu - \mu'\nu'}{\nu - \nu'} + x\frac{\mu - \mu'}{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'} + y = b$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die mit den beiden Linien

$$\varkappa y + x = \alpha,\ \mu z + y = \gamma,\ \nu x + z = \varepsilon \text{ und}$$
$$\varkappa' y + x = \alpha',\ \mu' z + y = \gamma',\ \nu' x + z = \varepsilon'$$

zugleich parallel läuft.

Läßt man die Ebene zugleich durch eine der Linien gehen, z. B. durch die erste, so ist

$$b = b' = \varkappa \zeta + \gamma = \frac{\mu - \mu'}{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'} \cdot \zeta + \gamma, \text{ also ist}$$

$$z \cdot \frac{\mu\nu - \mu'\nu'}{\nu - \nu'} + x \cdot \frac{\mu - \mu'}{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'} + y = \frac{\mu - \mu'}{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'} \cdot \zeta + \gamma \text{ oder}$$

$$132.\quad z \cdot \frac{\mu\nu - \mu'\nu'}{\nu - \nu'} + (x - \zeta)\frac{\mu - \mu'}{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'} + y - \gamma = 0;$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die durch die erste Linie geht und zugleich mit der andern parallel ist.

Durchschnitt zweier geraden Linien im Raume.

60.

Wenn sich zwei gerade Linien im Raume schneiden, so gelten ihre Gleichungen für den Durchschnitts-Punkt gemeinschaftlich. Wenn also die Gleichungen der Linien

$$\varkappa y + x = \alpha,\ \mu z + y = \gamma,\ \nu x + z = \varepsilon \text{ und}$$
$$\varkappa' y + x = \alpha',\ \mu' z + y = \gamma',\ \nu' x + z = \varepsilon'$$

und die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts x', y', z' sind, so darf man nur in beiden $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ setzen. Zieht man darauf die vierte von der ersten ab, so kommt

$$(\varkappa - \varkappa')y = \alpha - \alpha',$$

zieht man die fünfte von der zweiten ab, nachdem die fünfte mit μ, die zweite mit μ' multiplicirt worden, so kommt

$$(\mu' - \mu)y = \mu'\gamma - \mu\gamma', \text{ also eines durch das andere dividirt}$$

$$\frac{\mu' - \mu}{\varkappa - \varkappa'} = \frac{\mu'\gamma - \mu\gamma'}{\alpha - \alpha'}, \text{ oder wenn man mit } \mu\mu' \text{ dividirt}$$

$$\frac{\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu'}}{\varkappa-\varkappa'}=\frac{\frac{\gamma}{\mu}-\frac{\gamma'}{\mu'}}{\alpha-\alpha'},$$ oder, weil

$$\mu=\frac{\gamma}{\delta},\ \mu'=\frac{\gamma'}{\delta'},\ \frac{1}{\mu}=-\nu k,\ \frac{1}{\mu'}=-\nu' k'$$ ist,

133. $$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\nu'\varkappa'-\nu\varkappa}{\varkappa-\varkappa'}=\dfrac{\delta-\delta'}{\alpha-\alpha'}, \text{ also auch}\\[2ex] \dfrac{\mu'\nu'-\mu\nu}{\nu-\nu'}=\dfrac{\beta-\beta'}{\varepsilon-\varepsilon'} \text{ oder } \dfrac{\varkappa'\mu'-\varkappa\mu}{\mu-\mu'}=\dfrac{\zeta-\zeta'}{\gamma-\gamma'}.\end{array}\right.$$

Die Bedingung, die diese Gleichungen ausdrücken, muß erfüllt werden, wenn sich zwei gerade Linien im Raume schneiden sollen.

Man kann diese Bedingungs-Gleichungen auch noch auf einem andern Wege finden. Wenn sich nämlich die Linien schneiden, so liegen sie nothwendig in einer und derselben Ebene, die Bedingungs-Gleichungen aber, damit die erste Linie in irgend einer Ebene liegt, sind zufolge (117. und 118.) $k\zeta+\gamma=b$ und $1-m\mu+m\mu k\varkappa=0$ oder $\frac{k}{b}\zeta+\frac{\gamma}{b}=1$ und $\frac{1}{c}-\frac{m}{c}\mu+\frac{mk}{c}\mu\varkappa=0$ oder weil $m=\frac{c}{b}$, $k=\frac{b}{a}$, $mk=\frac{1}{n}=\frac{c}{a}$, $\mu\varkappa=-\frac{1}{\nu}=-\frac{\zeta}{\varepsilon}$, $\mu=\frac{\gamma}{\delta}$ (97.) ist,

$$1=\zeta.\frac{1}{a}+\gamma.\frac{1}{b} \text{ und } \frac{1}{c}-\frac{\zeta}{\varepsilon}.\frac{1}{a}-\frac{\gamma}{\delta}.\frac{1}{b}=0.$$

Die Bedingungs-Gleichungen, unter welchen die andere Linie in der nämlichen Ebene liegt, sind also

$$1=\zeta'.\frac{1}{a}+\gamma'.\frac{1}{b} \text{ und } \frac{1}{c}-\frac{\zeta'}{\varepsilon'}.\frac{1}{a}-\frac{\gamma'}{\delta'}.\frac{1}{b}=0$$

Man ziehe die dritte von der ersten und die vierte von der zweiten Gleichung ab, so kommt

$$(\zeta-\zeta')\frac{1}{a}+(\gamma-\gamma')\frac{1}{b}=0 \text{ und}$$

$$\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}-\frac{\zeta'}{\varepsilon'}\right)\frac{1}{a}+\left(\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\gamma'}{\delta'}\right)\frac{1}{b}=0$$

also ist, wenn man zwischen diesen beiden Gleichungen z. B. $\frac{1}{b}$ wegschafft

$$\left[(\zeta-\zeta')\left(\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\gamma'}{\delta'}\right)-(\gamma-\gamma')\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}-\frac{\zeta'}{\varepsilon'}\right)\right]\frac{1}{a}=0, \text{ folglich}$$

$$\frac{\zeta-\zeta'}{\gamma-\gamma'}=\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}-\frac{\zeta'}{\varepsilon'}\right):\left(\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\gamma'}{\delta'}\right)=\frac{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu'}}{\mu-\mu'} \text{ oder}$$

$$\frac{\zeta-\zeta'}{\gamma-\gamma'}=\frac{\varkappa'\mu'-\varkappa\mu}{\mu-\mu'}, \text{ wie (143.)}$$

Ebene, in welcher zwei sich schneidende gerade Linien im Raume liegen.

61.

Die mit zwei geraden Linien zugleich parallele Ebene, dergleichen für jede zwei Linien möglich ist (59.), ist, im Fall die Linien sich schneiden, keine andere, als die, in welcher die Linien beide liegen. Für eine solche mit zwei Linien zugleich parallele Ebene war $m=\frac{\nu-\nu'}{\mu\nu-\mu'\nu'}$ (125.). Weil nun, im Fall sich die Linien schneiden, $\frac{\nu-\nu'}{\mu'\nu'-\mu\nu}=\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\beta-\beta'}$ war (133.), so ist $m=-\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\beta-\beta'}$.

Die Lage der Ebene, in welcher beide Linien liegen, wird also durch

$$134.\quad m=-\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\beta-\beta'}\quad n=-\frac{\alpha-\alpha'}{\delta-\delta'}\quad k=-\frac{\gamma-\gamma'}{\zeta-\zeta'}$$

bestimmt. Es folgt auch, weil $k m n = 1$, daß

135. $(\varepsilon - \varepsilon')(\alpha - \alpha')(\gamma - \gamma') = -(\beta - \beta')(\delta - \delta')(\zeta - \zeta')$ ist.

Da nun die Gleichung der Ebene $x + \frac{y}{k} + n z = a$ ist, so ist dieselbe hier in diesem Falle

$$x - \frac{\zeta - \zeta'}{\gamma - \gamma'} y - \frac{\alpha - \alpha'}{\delta - \delta'} z = a$$

Für den Durchschnitts-Punkt x', y', z' der beiden Linien gibt diese Gleichung

$$x' - \frac{\zeta - \zeta'}{\gamma - \gamma'} y' - \frac{\alpha - \alpha'}{\delta - \delta'} z' = a.$$

Man ziehe dieselbe von der vorigen ab, so kommt

$$136. \quad (x - x') - \frac{\zeta - \zeta'}{\gamma - \gamma'}(y - y') - \frac{\alpha - \alpha'}{\delta - \delta'}(z - z') = 0,$$

welches die Gleichung der Ebene ist, die durch zwei sich schneidende gerade Linien im Raume geht.

Die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts folgen aus den obigen Gleichungen, z. B. aus (§. 60.) $(\varkappa - \varkappa')y = \alpha - \alpha'$, folglich ist

$$137. \quad y' = \frac{\alpha - \alpha'}{\varkappa - \varkappa'}, \; z' = \frac{\gamma - \gamma'}{\mu - \mu'}, \; x' = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\nu - \nu'}$$

Aus der andern Gleichung $(\mu - \mu')y = \mu'\gamma - \mu\gamma'$ (§. 60.), die y enthält, folgt

$$138. \quad \begin{cases} y = \dfrac{\mu'\gamma - \mu\gamma'}{\mu' - \mu} = \dfrac{\dfrac{\gamma}{\mu} - \dfrac{\gamma'}{\mu'}}{\dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{\mu'}} = \dfrac{\delta - \delta'}{\nu'\varkappa' - \nu\varkappa}, \text{ also} \\[2ex] z = \dfrac{\zeta - \zeta'}{\varkappa'\mu' - \varkappa\mu}, \quad x = \dfrac{\beta - \beta'}{\mu'\nu' - \mu\nu}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (137. und 138.) geben nichts Verschiedenes; denn vermöge der Bedingungs-Gleichungen (133.) für das Schneiden der Linie ist

$$\frac{\beta-\beta'}{\mu'\nu'-\mu\nu}=\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\nu-\nu'} \text{ etc.}$$

Setzt man nun die Werthe von x', y', z', z. B. diejenigen (137.) in die Gleichung (136.), so kommt

$$139.\quad \left(x-\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\nu-\nu'}\right)-\frac{\zeta-\zeta'}{\gamma-\gamma'}\left(y-\frac{\alpha-\alpha'}{\varkappa-\varkappa'}\right)$$
$$-\frac{\alpha-\alpha'}{\delta-\delta'}\cdot\left(z-\frac{\gamma-\gamma'}{\mu-\mu'}\right)=0,$$

welches vollständig die Gleichung der Ebene ist, die durch zwei sich schneidende gerade Linien im Raume geht.

Winkel, welchen zwei sich schneidende gerade Linien im Raume einschließen.

62.

Den Winkel zwischen zwei sich schneidenden geraden Linien im Raume kann man so finden:

Man lege den Anfangs-Punkt der Coordinaten in den Durchschnitts-Punkt der Linien und auf die erste Linie eine Ebene, in der Entfernung P von dem Punkte o senkrecht, so, daß P gleich der Länge des Perpendikels aus dem Punkte o auf die Ebene ist. Die Entfernung des Durchschnitts der zweiten Linie und der nämlichen Ebene von dem Punkt o, sey $=Q$, und der Winkel, den die beiden gegebenen Linien mit einander einschließen, $=V$, so ist

$$140.\quad Q\cos. V=P.$$

Wenn nun $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ die Gleichung der auf die erste Linie senkrecht gelegten Ebene ist und α, β, γ die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts der ersten Linie oder des Per-

pendikels, und der Ebene sind, so ist, wie in (11. II. am Ende)

$$\frac{\alpha}{P} = \frac{P}{a}, \quad \frac{\beta}{P} = \frac{P}{b}, \quad \frac{\gamma}{P} = \frac{P}{c}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\alpha}{P^2}, \quad \frac{1}{b} = \frac{\beta}{P^2}, \quad \frac{1}{c} = \frac{\gamma}{P^2}.$$

Setzt man dieses in die allgemeine Gleichung der Ebene, so gibt dieselbe $\frac{\alpha x}{P^2} + \frac{\beta y}{P^2} + \frac{\gamma z}{P^2} = 1$, also ist $P^2 = \alpha x + \beta y + \gamma z$, wie in (11. II.), welches für jeden beliebigen Punkt der Ebene gilt; also auch für den Durchschnitts-Punkt der zweiten Linie und der Ebene. Heißen daher dessen Coordinaten α', β' und γ', so ist

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = P^2$$

Die Coordinaten der Durchschnitts-Punkte der beiden Linien sind aber die Cosinus der Winkel, welche die Linien mit den Axen machen, für die Halbmesser P und Q; nämlich wenn diese Winkel für die erste Linie D, E, G, für die zweite Linie D′, E′, G′ heißen, so ist

$$\alpha = P \cos. D, \quad \beta = P \cos. E, \quad \gamma = P \cos. G;$$

$$\alpha' = Q \cos. D', \quad \beta' = Q \cos. E', \quad \gamma' = Q \cos. G'.$$

Es ist also

$$PQ \cos. D \cos. D' + PQ \cos. E \cos. E' + PQ \cos. G \cos. G' = P^2$$

$$= PQ \cos. V \text{ (140.) oder}$$

$$\text{141. } \cos. V = \cos. D \cos. D' + \cos. E \cos. E' + \cos. G \cos. G',$$

welches den Winkel gibt, den zwei sich schneidende Linien im Raume einschließen, und zwar durch die Winkel ausgedrückt, welche die Linien mit den Axen machen.

Man kann hieraus den Ausdruck des Winkels V durch die Größen finden, die gewöhnlich in den Gleichungen der Linien und Ebenen vorkommen. Die Gleichungen der beiden sich schneidenden Linien sind nämlich, weil sie beide durch den Anfangs-Punkt der Coordinaten gehen

$$\varkappa y + x = 0,\ \mu z + y = 0,\ \nu x + z = 0 \text{ und}$$
$$\varkappa' y + x = 0,\ \mu' z + y = 0,\ \nu' x + z = 0\ (99.),$$

hier sind $\varkappa$, μ, ν und $\varkappa'$, μ', ν' die Tangenten der Winkel, welche die Projectionen der beiden Linien im Raume auf die Ebenen der xy, yz und zx mit den Axen der y, z und x machen. Eben das sind die Größen $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ und $\frac{z}{x}$ für beide Linien. Denn auch z. B. $\frac{x}{y}$ ist die Tangente des Winkels, den die Projection einer durch den Punkt o gehenden Linie auf die Ebene der xy, mit der Axe der y macht.

Die x, y, z verhalten sich aber für beide Linien wie die Cosinus der Winkel D, E, G und D', E', G', die dieselben mit den Axen machen, denn man nehme auf den beiden Linien zwei Punkte in der Entfernung s vom Punkt o an, so daß

$s \cos. D = x$, so ist zugleich $s \cos. E = y$ und $s \cos. G = z$, und wenn

$s \cos. D' = x$, so ist auch $s \cos. E' = y$ und $s \cos. G' = z$ also ist

$$\frac{x}{y} = \frac{\cos. D}{\cos. E},\ \frac{y}{z} = \frac{\cos. E}{\cos. G} \text{ und } \frac{z}{x} = \frac{\cos. G}{\cos. D}$$

für die eine und

$$\frac{x}{y} = \frac{\cos. D'}{\cos. E'},\ \frac{y}{z} = \frac{\cos. E'}{\cos. G'} \text{ und } \frac{z}{x} = \frac{\cos. G'}{\cos. D'}$$

für die andere Linie.

Nun war aber $\frac{x}{y} = \varkappa$, $\frac{y}{z} = \mu$, $\frac{z}{x} = \nu$ für die eine und $\frac{x}{y} = \varkappa'$, $\frac{y}{z} = \mu'$, $\frac{z}{x} = \nu'$ für die andere Linie, also ist

$$\varkappa = \frac{\cos. D}{\cos. E},\ \mu = \frac{\cos. E}{\cos. G},\ \nu = \frac{\cos. G}{\cos. D} \text{ für die eine und}$$

$$\varkappa' = \frac{\cos. D'}{\cos. E'},\ \mu' = \frac{\cos. E'}{\cos. G'},\ \nu' = \frac{\cos. G'}{\cos. D'}$$

für die andere Linie.

Daraus folgt

$$142.\quad \begin{cases} \cos. E = \frac{\cos. D}{\varkappa} \text{ und } \cos. G = \nu \cos. D \\ \cos. E' = \frac{\cos. D'}{\varkappa'} \text{ und } \cos. G' = \nu' \cos. D \end{cases}$$

Setzt man dieses in die Gleichung (141.), so kommt

$$143.\quad \cos. V = \cos. D \cos. D' \left(1 + \frac{1}{\varkappa \varkappa'} + \nu \nu'\right)$$

Nun ist auch allgemein

$$\left.\begin{array}{l} \cos. D^2 + \cos. E^2 + \cos. G^2 = 1 \text{ und} \\ \cos. D'^2 + \cos. E'^2 + \cos. G'^2 = 1 \end{array}\right\} (78. \text{ §. } 37.)$$

also ist aus (142.) $\cos. D^2 \left(1 + \frac{1}{\varkappa^2} + \nu^2\right) = 1$ und

$\cos. D'^2 \left(1 + \frac{1}{\varkappa'^2} + \nu'^2\right) = 1$, folglich

$$\cos. D = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varkappa^2} + \nu^2\right)}} \text{ und } \cos. D' = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varkappa'^2} + \nu'^2\right)}}$$

mithin aus (142.)

$$\cos. V = \frac{1 + \frac{1}{\varkappa \varkappa'} + \nu \nu'}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varkappa^2} + \nu^2\right)} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varkappa'^2} + \nu'^2\right)}} \text{ oder}$$

$$144.\quad \begin{cases} \cos. V = \frac{1 + \nu \nu' + \mu \nu \mu' \nu'}{\sqrt{(1 + \nu^2 + \mu^2 \nu^2)} \sqrt{(1 + \nu'^2 + \mu'^2 \nu'^2)}} \\ \text{oder} \\ \cos. V = \frac{1 + \varkappa \varkappa' + \nu \varkappa \nu' \varkappa'}{\sqrt{(1 + \varkappa^2 + \nu^2 \varkappa^2)} \sqrt{(1 + \varkappa'^2 + \nu'^2 \varkappa'^2)}} \\ \text{oder} \\ \cos. V = \frac{1 + \mu \mu' + \varkappa \mu \varkappa' \mu'}{\sqrt{(1 + \mu^2 + \varkappa^2 \mu^2)} \sqrt{(1 + \mu'^2 + \varkappa'^2 \mu'^2)}} \end{cases}$$

welches den Winkel zwischen zwei sich schneidenden geraden Linien im Raume durch die Winkel ausdrückt, die die Projectionen der Linie auf die Coordinaten-Ebenen mit den Axen machen. Obgleich der Durchschnitts-Punkt der Linie in dem Punkt o angenommen worden, sind die Ausdrücke (140. u. 144.) dennoch ganz allgemein, denn die Neigung der Linie selbst oder ihrer Projectionen gegen die Axe, also sämmtliche Größen, die in den Ausdrücken vorkommen, sind die nämlichen, wenn man auch den Punkt o außer den Durchschnitts-Punkt der Linien legt.

Wenn die beiden Linien im Raume auf einander senkrecht stehen, so ist $\cos.V = 0$, also

$$145.\quad \begin{cases} 1 + \nu\nu' + \mu\mu\nu\nu' = 0 \text{ oder} \\ 1 + \varkappa\varkappa' + \nu\nu\varkappa\varkappa' = 0 \\ 1 + \mu\mu' + \varkappa\varkappa\mu\mu' = 0, \end{cases}$$

welches die Bedingung ist, unter welcher die Linien auf einander senkrecht stehen.

Diese Bedingungs-Gleichung kann man auch unmittelbar finden. Denn man lege auf die erste der beiden Linien $\varkappa y + x = 0$, $\mu z + y = 0$ und $\nu x + z = 0$ eine Ebene senkrecht, die sie im Punkt o schneidet, so befindet sich die andere Linie, weil sie auf der ersten senkrecht ist, in dieser Ebene. Die Gleichung der Ebene aber ist

$$z + \varkappa\mu x - \mu y = 0 \text{ (110. §. 53.), weil } c = 0$$

die Gleichungen der andern Linie sind

$$\varkappa' y + x = 0,\ \mu' z + y = 0 \text{ und } \nu' x + z = 0,$$

woraus folgt $y = -\mu' z'$, $x = -\frac{z}{\nu'}$.

Setzt man dieses in die Gleichung der Ebene, so kommt

$$z - \frac{\varkappa\mu z}{\nu'} + \mu\mu' z = 0 \text{ oder}$$

$$1 + \mu\mu' + \varkappa\mu\varkappa'\mu' = 0,$$

welches die obige Bedingungs-Gleichung ist.

Sind die Linien mit einander parallel, so muß cos. $V = 1$ seyn, welches auch der Fall ist; denn gemäß (121. §. 56.) ist für zwei parallele Linien im Raume $\varkappa = \varkappa'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$, welches cos. $V = 1$ gibt.

Winkel, den zwei Ebenen einschließen.

63.

Um den Winkel zu finden, den zwei Ebenen mit einander machen, die sich schneiden, ziehe man aus dem Punkt o auf jede der beiden Ebenen einen Perpendikel, und lege durch die beiden Perpendikel eine neue Ebene, so stehet diese neue Ebene auf den beiden schiefen Ebenen senkrecht, weil sich die Perpendikel in ihr befinden. Sie steht also auch auf dem Durchschnitt der beiden schiefen Ebenen senkrecht, folglich stehen auch ihre Durchschnitte mit den beiden schiefen Ebenen auf dem Durchschnitt der letzteren senkrecht. Mithin schließen jene Durchschnitte den Winkel ein, den die beiden schiefen Ebenen mit einander machen.

Die beiden Perpendikel und die beiden Durchschnitte der Perpendicular-Ebene mit den schiefen Ebenen bilden ein in der Perpendicular-Ebene liegendes Viereck, von welchem zwei gegenüberstehende Winkel rechte sind, nämlich die Winkel, welche die Perpendikel mit den Durchschnitten der Perpendicular-Ebene und der schiefen Ebenen machen. Also beträgt die Summe der übrigen zwei Winkel auch zwei rechte. Von diesen beiden übrigen Winkeln ist aber der eine derjenige, den die Perpendikel, der andere der, den die Ebenen mit einander machen, also ist der eine das Supplement des andern. Heißt daher der Winkel, den die Ebenen mit einander machen, W, der Winkel aber, den die Perpendikel mit einander machen, V, so ist

146. $\cos. W = -\cos. V.$

Nun ist aus der vorigen Nummer

$$\cos. V = \frac{1 + \nu\nu' + \mu\nu\mu'\nu'}{\sqrt{(1 + \nu^2 + \mu^2\nu^2)}\sqrt{(1 + \nu'^2 + \mu'^2\nu'^2)}}$$

also ist

$$147.\quad \cos. W = -\frac{1 + \nu\nu' + \mu\nu\mu'\nu}{\sqrt{(1 + \nu^2 + \mu^2\nu^2)}\sqrt{(1 + \nu'^2 + \mu'^2\nu'^2)}}$$

Die Größen, durch welche cos. W ausgedrückt ist, beziehen sich auf die Perpendikel. Sind nun die Gleichungen der beiden schiefen Ebenen, die den Winkel W einschließen.

$$abz + bcx + cay = abc \text{ und}$$

$$a'b'z + b'c'x + c'a'y = a'b'c',$$

so muß vermöge (§. 50.)

$$\frac{b}{a} \text{ oder } k = -\varkappa,\ \frac{c}{b} \text{ oder } m = -\mu,\ \frac{a}{c} \text{ oder } n = -\nu,$$

$$\frac{b'}{a'} \text{ oder } k' = -\varkappa',\ \frac{c'}{b'} \text{ oder } m' = -\mu',\ \frac{a'}{c'} \text{ oder } n' = -\nu'$$

seyn, also ist vermöge (147.)

$$148.\quad \begin{cases} \cos. W = -\dfrac{1 + nn' + mnm'n'}{\sqrt{(1+n^2+m^2n^2)}\sqrt{(1+n'^2+m'^2n'^2)}} \\ \text{oder} \\ \cos. W = -\dfrac{1 + kk' + nkn'k'}{\sqrt{(1+k^2+n^2k^2)}\sqrt{(1+k'^2+n'^2k'^2)}} \\ \text{oder} \\ \cos. W = -\dfrac{1 + mm' + kmk'm'}{\sqrt{(1+m^2+k^2m^2)}\sqrt{(1+m'^2+k'^2m'^2)}} \end{cases}$$

Dieses ist der Cosinus des Winkels, den die beiden schiefen Ebenen mit einander einschließen.

Sind dieselben auf einander senkrecht, so ist cos. W = 0, also ist

$$149.\quad \begin{cases} 1 + nn' + mnm'n' = 0 \text{ oder} \\ 1 + kk' + nkn'k' = 0 \text{ oder} \\ 1 + mm' + kmk'm' = 0, \end{cases}$$

oder auch, wenn man die Größen a, b, c, a', b', c' in den Ausdruck setzt

$$150.\quad \begin{cases} 1 + \frac{aa'}{cc'} + \frac{aa'}{bb'} = 0 \text{ oder} \\ \frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'} = 0, \end{cases}$$

welches also die Bedingung für die Perpendicularität zweier Ebenen ist.

Auch diese Bedingung kann man unmittelbar auf eine ähnliche Weise, wie diejenige für perpendiculäre Linien in (§. 62.) finden, denn man lege zwei Ebenen mit den gegebenen parallel durch den Punkt o und errichte in diesem Punkt auf die eine ein Perpendikel, so befindet sich dasselbe in der andern Ebene. Dieses gibt nach einer ähnlichen Rechnung, wie am angeführten Orte, die obige Bedingungs-Gleichung.

Die Gleichungen der beiden Ebenen waren

$$z + \frac{x}{n} + my = c \text{ und } z + \frac{x}{n'} + m'y = c' \text{ oder}$$

$$z - kmx + my = c \text{ und } z - k'm'x + m'y = c'.$$

Aus der Bedingungs-Gleichung für die Perpendicularität folgt

$$k'm' = -\frac{1 + mm'}{km}.$$

Setzt man dieses in die Gleichung der zweiten Ebene, so kommt

$$z + \frac{1 + mm'}{km} x + m'y = c' \text{ oder}$$

$$kmz + (1 + mm')x + kmm'y = kmc' \text{ oder}$$

$$\frac{z}{n} + (1 + mm')x + \frac{m'}{n} y = \frac{c'}{n} \text{ oder}$$

$$\frac{zc}{a} + \left(1 + \frac{cc'}{bb'}\right) x + \frac{c}{a}\frac{c'}{b'} y = \frac{c'c}{a} \text{ oder}$$

$$151.\quad \begin{cases} zcbb' + ybcc' + x(abb' + acc') = bb'cc' \text{ oder} \\ xacc' + zcbb' + y(bcc' + baa') = cc'aa' \text{ oder} \\ ybaa' + xacc' + z(caa' + cbb') = aa'bb' \end{cases}$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die auf der Ebene $zab + xbc + yca = abc$ senkrecht steht.

Ebene, die auf einer andern senkrecht ist und zugleich durch eine gegebene gerade Linie geht.

64.

Soll die senkrechte Ebene durch eine gegebene gerade Linie gehen, so müssen erstlich die Bedingungen (§. 55.) für den Durchgang der Ebene durch die Linie, zweitens muß die Bedingung für die Perpendicularität der Ebenen erfüllt werden. Die Gleichungen der Linie sollen seyn

$$\varkappa y + x = \alpha,\ \mu z + y = \gamma,\ \nu x + z = \varepsilon,$$

so sind die Bedingungen für den Durchgang der Ebene $\frac{x}{n'} + ym' + z = c'$ durch diese Linie

$$c' = \beta m' + \varepsilon \text{ und } 1 + m'\mu n'\nu - n'\nu = 0 \ (117.)$$

hingegen die Bedingung für die Perpendicularität der Ebenen $\frac{x}{n'} + ym' + z = c'$ und $\frac{x}{n} + ym + z = c$, ist $1 + nn' + mnm'n' = 0$ (149.). Aus der ersten folgt

$$152.\ \begin{cases} m'n' = -\frac{1 - n'\nu}{\mu\nu}. & \text{Aus der andern folgt} \\ m'n' = -\frac{1 + nn'}{mn}, & \text{also ist} \end{cases}$$

$$\frac{1 - n'\nu}{\mu\nu} = \frac{1 + mn'}{nn}, \text{ folglich}$$

$$mn - \mu\nu = n'n\nu(\mu + m), \text{ also}$$

$$153.\ n' = \frac{mn - \mu\nu}{n\nu(\mu + m)}, \text{ und da}$$

$$m = -\frac{1 + nn'}{mnn'} = -\frac{1}{mnn'} - \frac{1}{m} \text{ war (152.) vermöge (151.)}$$

$$m' = -\frac{\nu(\mu + m)}{m(mn - \mu\nu)} - \frac{1}{m} \text{ oder}$$

$$m' = -\frac{\nu\mu + \nu m + mn + \mu\nu}{m(mn - \mu\nu)} \text{ oder}$$

$$m' = -\frac{n + \nu}{mn - \mu\nu}.$$

Dieses gibt c' oder $\beta m' + \varepsilon = -\beta \cdot \frac{n+\nu}{mn - n\nu} + \varepsilon.$

Setzt man die so eben gefundenen Ausdrücke von m', n' und c' in die Gleichung der Ebene

$$z + \frac{x}{n'} + m'y = c', \text{ so kommt}$$

$$z + x \cdot \frac{n\nu(\mu + m)}{mn - \mu n} - y\frac{n + \nu}{mn - \mu\nu} = \varepsilon - \beta\frac{n + \nu}{mn - \mu\nu} \text{ oder}$$

$$z(mn - \mu\nu) + xn\nu(\mu + m) - y(n + \nu)$$
$$= \varepsilon(mn - \mu\nu) - \beta(n + \nu) \text{ oder}$$

$$z\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\varkappa}\right) + x(n\nu\mu + nm\nu) - y(n + \nu)$$
$$= \varepsilon\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\varkappa}\right) - \beta(n + \nu) \text{ oder}$$

154.
$$(z - \varepsilon)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\varkappa}\right) - (y - \beta)(n + \nu) + x\left(\frac{\nu}{k} - \frac{n}{\varkappa}\right) = 0,$$

also auch

$$(x - \alpha)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu}\right) - (z - \delta)(k + \varkappa) + y\left(\frac{\varkappa}{m} - \frac{k}{\mu}\right) = 0,$$

und

$$(y - \gamma)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\nu}\right) - (x - \zeta)(m + \mu) + z\left(\frac{\mu}{n} - \frac{m}{\nu}\right) = 0,$$

welches die Gleichungen einer Ebene sind, die auf der Ebene $z + \frac{x}{n} + \frac{m}{y} = c$ senkrecht steht, und zugleich durch der in dieser

Ebene befindliche gerade Linie $\varkappa y + x = \alpha$, $\mu z + y = \gamma$, $\nu x + z = \varepsilon$ geht.

Winkel zwischen einer geraden Linie im Raume und einer Ebene.

65.

Um den Winkel zu finden, den eine gegebene gerade Linie im Raume mit einer gegebenen Ebene macht, lege man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Linie und errichte aus demselben ein Perpendikel auf die Ebene, so ist die Ebene, welche durch die gegebene Linie und durch das Perpendikel geht, auf die schiefe Ebene senkrecht, weil sich das Perpendikel in ihr befindet. In der Perpendicular-Ebene bilden also die gegebene Linie vom Punkt o bis zur Ebene, das Perpendikel vom Punkt o bis zur Ebene und der Durchschnitt der Perpendicular- und der schiefen Ebene ein rechtwinkliches Dreieck, dessen zweiter Winkel der ist, den die gegebene Linie mit dem Perpendikel, der dritte der verlangte Winkel ist, den die gegebene Linie mit der Ebene macht. Die beiden letzten Winkel sind also einer des andern Complement. Heißt folglich der Winkel zwischen der gegebenen Linie und dem Perpendikel auf die Ebene, wie oben, V, und der gesuchte Winkel zwischen der gegebenen Linie und der Ebene U, so ist

$$155. \quad \sin. U = \cos. V.$$

Nimmt man daher cos. V aus (144. §. 62.), so ist unmittelbar

$$\sin. U = \frac{1 + \nu\nu' + \mu\nu\mu'\nu'}{\sqrt{(1 + \nu^2 + \mu^2\nu^2)}\sqrt{(1 + \nu'^2 + \mu'^2\nu'^2)}}.$$

Beziehen sich $\varkappa$, μ, ν auf die gegebene Linie, so gehören $\varkappa'$, μ', ν' dem Perpendikel auf die gegebene Ebene zu. Wenn nun für diese

$$\frac{b}{a} = k, \quad \frac{c}{b} = m, \quad \frac{a}{c} = n \text{ ist, so muß}$$

$$\varkappa' = -k, \quad \mu' = -m, \quad \nu' = -n \text{ seyn (§. 50. u. 62.),}$$

damit die Linie, zu welcher $\varkappa'$, μ', ν' gehören, auf der Ebene perpendiculär stehe; also ist

$$156. \begin{cases} \sin. U = \dfrac{1 - \nu n + m n \mu \nu}{\sqrt{(1 + \nu^2 + \mu^2 \nu^2)} \sqrt{(1 + n^2 + m^2 n^2)}} \\ \text{oder} \\ \sin. U = \dfrac{1 - \varkappa k + n k \nu \varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2 + \nu^2 \varkappa^2)} \sqrt{(1 + k^2 + n^2 k^2)}} \\ \text{oder} \\ \sin. U = \dfrac{1 - \mu m + k m \varkappa \mu}{\sqrt{(1 + \mu^2 + \varkappa^2 \mu^2)} \sqrt{(1 + \nu^2 + k^2 m^2)}} \end{cases}$$

welcher Ausdruck den Winkel zwischen einer gegebenen Linie und einer gegebenen Ebene gibt.

Von der geraden Linie im Raume, die auf zwei andern geraden Linien zugleich senkrecht steht.

66.

So wie es allemal eine Ebene gibt, die mit zwei beliebigen geraden Linien im Raume zugleich parallel ist, so gibt es auch allemal eine gerade Linie, die auf zwei andern geraden Linien zugleich senkrecht steht. Denn man lege durch jede der beiden gegebenen Linien eine Ebene, die mit der andern Linie parallel läuft, also durch die beiden Linien zwei Ebenen, die mit einander parallel sind, darauf aber zwei andere Ebenen ebenfalls durch die gegebenen Linien, die auf jenen parallelen Ebenen senkrecht stehen, so geht nothwendig der Durchschnitt dieser beiden letzten Ebenen ebenfalls durch die gegebenen Linien. Er steht aber auch auf den durch die gegebenen Linien gehenden parallelen Ebenen, folglich auf den Linien selbst senkrecht. Also ist dieser Durchschnitt eine gerade Linie, die auf den beiden gegebenen Linien im Raume zugleich senkrecht steht.

Man erhält die Gleichung dieses gemeinschaftlichen Perpendikels auf zwei geraden Linien im Raume, wenn man die Gleichungen der beiden Ebenen kennt, die, durch die Linien gehend,

auf den beiden, ebenfalls durch die Linien gehenden, parallelen Ebenen senkrecht stehen, denn der gemeinschaftliche Perpendikel ist, wie gesagt, der Durchschnitt dieser Ebenen.

Die Gleichungen der beiden durch die Linien gehenden parallelen Ebenen sollen seyn

$$z+\frac{x}{n}+my=c \text{ und } z+\frac{x}{n'}+m'y=c'$$

so ist $n=n'$, $m=m'$, $k=k'$ (121. §. 56.), weil die Ebenen parallel seyn sollen; also sind ihre Gleichungen

$$z+\frac{x}{n}+my=c \text{ und } z+\frac{x}{n}+my=c'.$$

Auf diesen Ebenen sollen zwei andere senkrecht stehen, die zugleich durch die beiden gegebenen geraden Linien im Raume gehen.

Die Gleichung einer Ebene, die auf der Ebene $z+\frac{x}{n}+my=c$ senkrecht steht und zugleich durch die in der letzten befindliche Linie

$$\varkappa y+x=\alpha,\ \mu z+y=\gamma,\ \nu x+z=\varepsilon$$

geht, ist

$$(y-\gamma)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\nu}\right)-(x-\zeta)(m+\mu)+z\left(\frac{\mu}{n}-\frac{m}{\nu}\right)=0 \quad (157.)$$

Eben so ist die Gleichung der andern Ebene, die auf der mit $z+\frac{x}{n}+my=c$ parallelen Ebene $z+\frac{x}{n}+my=c'$ senkrecht steht und zugleich durch die in ihr befindliche Linie $\varkappa' y+x=\alpha'$, $\mu' z+y=\gamma'$, $\nu' x+z=\varepsilon'$ geht

$$(y-\gamma')\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\nu'}\right)-(x-\zeta')(m+\mu')+z\left(\frac{\mu'}{n}-\frac{m}{\nu'}\right)=0.$$

Diese beiden Gleichungen sind also diejenigen der gesuchten Ebenen, deren Durchschnitt das gemeinschaftliche Perpendikel ist.

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Größen k, m, n sind die Coefficienten der beiden mit den gegebenen Linien im Raume parallelen Ebenen $z + \frac{x}{n} + my = c$ und $z + \frac{x}{n} + my = c'$.

Sie werden also durch die Bedingung bestimmt, daß die Ebenen mit beiden Linien zugleich parallel sind. Es muß deshalb

$$k = \frac{\mu - \mu'}{\varkappa\mu - \varkappa'\mu'}, \; m = \frac{\nu - \nu'}{\mu\nu - \mu'\nu'}, \; n = \frac{\varkappa - \varkappa'}{\nu\varkappa - \nu'\varkappa'}$$

seyn (125. §. 59.).

Man schaffe hieraus von den Größen $\varkappa$, μ, ν eine, z. B. $\varkappa$, und von den drei Größen $\varkappa'$, μ', ν' ebenfalls eine, z. B. $\varkappa'$ weg, welches vermittelst der Gleichungen $\varkappa, \mu, \nu = -1$ und $\varkappa', \mu', \nu' = -1$ angeht, so ist

$$k = \frac{\mu - \mu'}{\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}} = \frac{\nu\nu'(\mu - \mu')}{\nu - \nu'}$$

$$m = \frac{\nu - \nu}{\mu\nu - \mu'\nu'} \text{ und}$$

$$n = \frac{\frac{1}{\mu\nu'} - \frac{1}{\mu\nu}}{\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu\nu - \mu'\nu'}{\nu\nu'(\mu - \mu')}.$$

Setzt man diese Werthe von k, m, n und k', m', n' in die obigen Gleichungen der ersten perpendiculären Ebene

$$(y - \gamma)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\nu}\right) - (x - \xi)(m + \mu) + z\left(\frac{\mu}{n} - \frac{m}{\nu}\right) = 0,$$

so erhält man

$$(y - \gamma)\left(\frac{\nu\nu'(\mu - \mu')}{\mu\nu - \mu'\nu'} + \frac{1}{\nu}\right) - (x - \xi)\left(\frac{\nu - \nu}{\mu\nu - \mu'\nu'} + \mu\right)$$
$$+ z\left(\frac{\mu\nu\nu'(\mu - \mu')}{\mu\nu - \mu'\nu'} - \frac{\nu - \nu}{(\mu\nu - \mu'\nu')}\right) = 0,$$

oder wenn man mit $\nu(\mu\nu - \mu'\nu')$ multiplicirt

$$157. \begin{cases} (x-\zeta)[\nu(\nu-\nu')+\mu\nu(\mu\nu-\mu'\nu')]+(y-\gamma)[\nu^2\nu'(\mu'-\mu) \\ \quad +(\mu'\nu'-\mu\nu)]+z[\mu\nu^2\nu'(\mu'-\mu)+\nu-\nu']=0 \\ (y-\beta)[\varkappa(\varkappa-\varkappa')+\nu\varkappa(\nu\varkappa-\nu'\varkappa')]+(z-\varepsilon)[\varkappa^2\varkappa'(\nu'-\nu) \\ \quad +(\nu'\varkappa'-\nu\varkappa)]+x[\nu\varkappa^2\varkappa'(\nu'-\nu)+\varkappa-\varkappa']=0 \\ (z-\delta)[\mu(\mu-\mu')+\varkappa\mu(\varkappa\mu-\varkappa'\mu')]+(x-\alpha)[\mu^2\mu'(\varkappa'-\varkappa) \\ \quad +(\varkappa'\mu'-\varkappa\mu)]+y[\varkappa\mu^2\mu'(\varkappa'-\varkappa)+\mu-\mu']=0 \end{cases}$$

Die Gleichung der andern Ebene findet man hieraus unmittelbar, wenn man $\varkappa$, μ, ν und $\varkappa'$, μ', ν' und α, β, γ, δ, ε, ζ mit α', β', γ', δ', ε', ζ' verwechselt, nämlich

$$158. \begin{cases} (x-\zeta')[\nu'(\nu'-\nu)+\mu'\nu'(\mu'\nu-\mu\nu)]+(y-\gamma')[\nu'^2\nu(\mu-\mu') \\ \quad +(\mu\nu-\mu'\nu')]+z[\mu'\nu'^2\nu(\mu-\mu')+\nu'-\nu]=0 \\ (y-\beta')[\varkappa'(\varkappa'-\varkappa)+\nu'\varkappa'(\nu'\varkappa'-\nu\varkappa)]+(z-\varepsilon')[\varkappa'^2\varkappa(\nu-\nu') \\ \quad +(\nu\varkappa-\nu'\varkappa')]+x[\nu'\varkappa'^2\varkappa(\nu-\nu')+\varkappa'-\varkappa]=0 \\ (z-\delta')[\mu'(\mu'-\mu)+\varkappa'\mu'(\varkappa'\mu'-\varkappa\mu)]+(x-\alpha')[\mu'^2\mu(\varkappa-\varkappa') \\ \quad +(\varkappa\mu-\varkappa'\mu')]+y[\varkappa'\mu'^2\mu(\varkappa-\varkappa')+\mu'-\mu]=0 \end{cases}$$

und der Durchschnitt beider Ebenen ist das gesuchte Perpendikel.

Wenn man auf die beiden mit einander und mit den Linien parallelen Ebenen Perpendikel aus dem Punkt o zieht, so fallen dieselben in einander, weil die Ebenen parallel sind. Also ist der Unterschied der Länge der beiden Perpendikel die Entfernung der beiden Ebenen von einander. Diese Entfernung aber ist die Länge eines Perpendikels zwischen den beiden Ebenen, welches Perpendikel wiederum eben dem obigen auf die beiden Linien im Raume gemeinschaftlichen Perpendikel gleich ist; also ist die Länge dieses gemeinschaftlichen Perpendikels dem Unterschiede der Länge der Perpendikel aus dem Punkt o auf die beiden parallelen Ebenen gleich.

Die Länge eines Perpendikels aus dem Punkt o auf eine Ebene $z + \frac{x}{n} + my = c$ ist aber

$$P = \frac{c}{\sqrt{(1 + m^2 + k^2 m^2)}} \text{ (76. §. 36.)},$$

also ist die Länge des Perpendikels auf die andere parallele Ebene, weil für dieselbe k, m und n dieselben Werthe haben

$$P' = \frac{c'}{\sqrt{(1 + m^2 + k^2 m^2)}}.$$

Mithin ist die Länge des gemeinschaftlichen Perpendikels

$$P'' = P' - P = \frac{c' - c}{\sqrt{(1 + m^2 + k^2 m^2)}}.$$

Nun ist $c = \beta m + \varepsilon$, $c' = \beta' m + \varepsilon'$ (117. §. 55.), also ist

$$P'' = \frac{m(\beta' - \beta) + \varepsilon' - \varepsilon}{\sqrt{(1 + m^2 + k^2 m^2)}}.$$

Setzt man hierin die Werthe von k, m, n (125.), so kommt

$$P'' = \frac{\frac{\nu - \nu'}{\mu\nu - \mu'\nu'}(\beta' - \beta) + \varepsilon' - \varepsilon}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\nu - \nu'}{\mu\nu - \mu'\nu'}\right)^2 + \frac{\nu^2 \nu'^2 (\mu - \mu')^2}{(\mu\nu - \mu'\nu')^2}\right)}} \text{ oder}$$

$$159.\quad P'' = \frac{(\nu - \nu')(\beta' - \beta) + (\varepsilon' - \varepsilon)(\mu\nu - \mu'\nu')}{\sqrt{[(\mu\nu - \mu'\nu')^2 + (\nu - \nu')^2 + \nu'^2 \nu^2 (\mu - \mu')^2]}}$$

welches die Länge des gemeinschaftlichen Perpendikels ist.

Schneiden sich die beiden gegebenen Linien, so ist die Länge des gemeinschaftlichen Perpendikels $= 0$, also ist in diesem Falle

$$160.\quad (\nu - \nu')(\beta' - \beta) + (\varepsilon' - \varepsilon)(\mu\nu - \mu'\nu') = 0,$$

welches die Bedingung für das Schneiden zweier geraden Linien im Raume ist, und wie gehörig mit (133. §. 60.) übereinstimmt.

Liegt eine der beiden gegebenen Linien in einer Axe, z. B. in der Axe der x, so sind in ihren Gleichungen

$$\varkappa y + x = \alpha, \ \mu z + y = \gamma, \ \nu x + z = \varepsilon \text{ oder}$$

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta, \ \gamma z + \delta y = \gamma\delta, \ \varepsilon x + \zeta z = \varepsilon\zeta,$$

$$\beta = 0, \ \gamma = 0 \text{ und } \varepsilon = 0, \text{ also } \varkappa = \infty, \ \mu = 0, \ \nu = 0,$$

folglich sind die Gleichungen der Ebenen, deren Durchschnitt das gemeinschaftliche Perpendikel (157. und 158.) ist, in diesem Falle

$$161. \quad \begin{cases} y\mu' - z = 0 \text{ und} \\ (x - \zeta')\nu'(1 + \mu'^2) - (y - \gamma')\mu' - z = 0. \end{cases}$$

Die Länge des gemeinschaftlichen Perpendikels ist

$$162. \quad P'' = -\frac{(\beta' + \varepsilon'\mu')}{\gamma(1 + \mu'^2)}.$$

67.

Besonders bei der letzten Untersuchung zeigt sich's, wie nützlich eine völlig symmetrische Bezeichnung der vorkommenden Größen ist. Den Ausdrücken können mit der größten Leichtigkeit ihre verschiedenen Formen blos durch das Fortrücken der Buchstaben gegeben werden, welches ohne das nicht wohl angeht; z. B. bei Monge nicht, in der Application de l'analyse à la géométrie, wo die nämliche Untersuchung vorkommt. Will man sonst die andern Formen der Ausdrücke haben, so muß man beinahe die Rechnung wiederholen.

Der Gang der Untersuchung des gemeinschaftlichen Perpendikels auf zwei gerade Linien im Raume weicht hier von demjenigen bei Monge ab. Die hiesige Auflösung ist etwas directer und einfacher. Lacroix braucht wieder die Differential-Rechnung. Er findet aber nur die Länge des Perpendikels, nicht seine Lage.

68.

Die gegenwärtige Abhandlung ließe sich noch weiter fortsetzen. So ist z. B. eine der interessantesten hierher gehörigen

Aufgaben, die von der Verwandlung der Coordinaten in der Ebene und im Raume, wo auch Manches vielleicht noch kürzer und deutlicher vorgetragen werden kann.

Um indessen den Umfang dieser Bemerkungen nicht zu sehr zu vergrößern, mögen sie hiermit geschlossen, und es mag, was noch zu sagen übrig ist, vielleicht in der Folge nachgeholt werden.

2.

Inhalt der Polygone und Polyëder durch die Coordinaten der Ecken.

69.

Ich kam vor einiger Zeit auf Formeln, welche den Inhalt der Polygone und der Polyëder durch die Coordinaten der Ecken auf eine interessante Weise ausdrücken. Seitdem fand ich zwar, daß Stainville in den mélanges d'analyse algebrique et de géometrie, Paris chez Courcier 1815, die nämliche Formel für die Polygone und Monge im 12ten Heft des Journal de l'école polytechnique die Formel für Polyëder gegeben hat. Da indessen beide nicht sehr bekannt sind, und nicht allein die Entwickelung etwas Eigenthümliches hat, sondern auch die Formeln in manchen andern Fällen nützlich seyn können, so theile ich sie hier mit.

I. Polygone.

70.

Fig. 18. MX und MY sollen die Axen rechtwinklicher Coordinaten und

$$MA'=a,\ AA'=\alpha$$
$$MB'=b,\ BB'=\beta$$
$$MC'=c,\ CC'=\gamma$$
$$MD'=d,\ DD'=\delta$$
$$ME'=e,\ EE'=\varepsilon$$
$$MF'=f,\ FF'=\zeta$$

die rechtwinkligen Coordinaten der Ecken des Polygons ABCDEF seyn. Die Ordinaten bilden mit den Seiten des Polygons und z. B. mit der Axe der x so viele Trapeze $AA'BB'$, $BB'CC'$ ꝛc. als das Polygon Seiten hat. Nimmt man den Inhalt der Trapeze unter den obern Seiten des Polygons, von der Ecke A an, die der Axe der y am nächsten liegt, bis zu der Ecke D, welche am weitesten davon entfernt ist, zusammen, und zieht davon die Summe des Inhalts der Trapeze unter den untern Seiten, ebenfalls von der Ecke A bis zur Ecke D, ab, so erhält man den Inhalt des Polygons ABCDEF. Der Inhalt der verschiedenen Trapeze kann aber ganz auf einerlei Art durch die Coordinaten ausgedrückt werden, nämlich, wenn man zwei auf einander folgende Abscissen von einander abzieht, und den Rest mit der halben Summe der Ordinaten multiplicirt, z. B. den Inhalt des Trapezes $ABA'B'$ durch $\frac{1}{2}(b-a)(\beta+\alpha)$. Für alle Trapeze unter den obern Seiten, vom Punkt A bis zum Punkt D, drückt diese Formel den Inhalt positiv, und über D hinaus negativ aus, weil dort z. B. MD' von ME' abzuziehen seyn würde, welches $-E'D'$, also den Inhalt des Trapezes $EDE'D'$ negativ giebt. Wendet man daher die Formel für den Inhalt auf alle Trapeze gleichförmig an, so hat man gerade was man braucht, nämlich den Inhalt der Trapeze unter den obern Seiten des Polygons positiv, und den Inhalt der Trapeze unter den untern Seiten desselben negativ. Folglich ist die algebraische Summe aller Trapeze ohne Unterschied, der verlangte Inhalt des Polygons, der P heißen soll. Derselbe ist also

$$2P=(b-a)(\beta+\alpha)+(c-b)(\gamma+\beta)+(d-c)(\delta+\gamma)$$
$$+(e-d)(\varepsilon+\delta)+(f-e)(\zeta+\varepsilon)+(a-f)(\alpha+\zeta)$$

oder
$$\begin{aligned}2P=&\,b\beta+b\alpha-a\beta-a\alpha\\&+c\gamma+c\beta-b\gamma-b\beta\\&+d\delta+d\gamma-c\delta-c\gamma\\&+e\varepsilon+e\delta-d\varepsilon-d\delta\\&+f\zeta+f\varepsilon-e\zeta-e\varepsilon\\&+a\alpha+a\zeta-f\alpha-f\zeta\end{aligned}$$

oder, wenn man wegläßt was sich aufhebt,

$$2P = b\alpha - a\beta + c\beta - b\gamma + d\gamma - c\delta + e\delta - d\varepsilon + f\varepsilon - e\zeta + a\zeta - f\alpha \text{ oder}$$

$$163. \begin{cases} P = \frac{1}{2}[b(\alpha-\gamma) + c(\beta-\delta) + d(\gamma-\varepsilon) + e(\delta-\zeta) \\ \quad + f(\varepsilon-\alpha) + a(\zeta-\beta)] \text{ oder} \\ P = \frac{1}{2}[\alpha(b-f) + \beta(c-a) + \gamma(d-b) + \delta(e-c) \\ \quad + \varepsilon(f-d) + \zeta(a-e)], \end{cases}$$

welches der Ausdruck des Inhalts des Polygons ABCDEF durch die Coordinaten der Ecken ist.

Das Gesetz dieser Formeln ist leicht zu erkennen, und folglich die Aufstellung derselben für ein Polygon von mehr oder weniger Seiten, ohne die Rechnung zu wiederholen, leicht.

Die Formeln können zu mancherlei geometrischen Berechnungen angewendet werden. So z. B. pflegt man bekanntlich die Abstände der verschiedenen Punkte eines zu einer topographischen Aufnahme gemessenen Dreiecks-Netzes von zwei auf einander senkrechten, etwa mit dem Aequator und irgend einem Meridian parallelen Axen, auch ohne Absicht auf den Flächen-Inhalt, schon des genauen Aufzeichnens wegen, aus den gemessenen Winkeln und den berechneten oder gemessenen Dreiecks-Seiten herzuleiten. Diese Abstände sind die hiesigen Coordinaten, und folglich, wenn man die obigen Formeln anwendet, zugleich die Elemente zur Berechnung des Flächen-Inhalts des ganzen Dreiecks-Netzes. Führt man sie in die obigen Formeln gehörig ein, so erhält man unmittelbar und sehr leicht diese Flächen-Inhalte.

71.

Man kann die Formeln für den Inhalt noch um etwas abkürzen, wenn man eine Ecke des Polygons, z. B. A, in den Anfangs-Punkt der Coordinaten, und eine der beiden in diese Ecke zusammenstoßenden Seiten, z. B. AF, in eine der Axen, z. B. in die Axe der x legt.

Alsdann sind in dem obigen Beispiel a, α und $\zeta = 0$ und die beiden Ausdrücke für P werden

$$164. \begin{cases} P = \tfrac{1}{2}[-b\gamma + c(\beta - \delta) + d(\gamma - \varepsilon) + e\delta + f\varepsilon] \text{ und} \\ P = \tfrac{1}{2}[\beta c + \gamma(d - b) + \delta(e - c) + \varepsilon(f - d)] \end{cases}$$

72.

Wäre das Polygon ein Dreieck, so wäre der Inhalt nach der obigen Formel, wenn die Coordinaten der drei Ecken a und α, b und β, c und γ heißen,

$$165. \begin{cases} P = \tfrac{1}{2}[b(\alpha - \gamma) + c(\beta - \alpha) + a(\gamma - \beta)] \text{ oder} \\ P = \tfrac{1}{2}[\alpha(b - c) + \beta(c - a) + \gamma(a - b)] \end{cases}$$

Legt man die Ecke A in den Anfangs=Punkt der Coordinaten, so sind a und $\alpha = 0$, und der Inhalt ist

$$166. \quad P = \tfrac{1}{2}(c\beta - b\gamma).$$

Legt man auch noch die Seite ac in die Axe der x, so ist noch $\gamma = 0$ und

$$P = \tfrac{1}{2} c\beta,$$

das heißt, gleich dem Produkt der Hälfte des Perpendikels der Grundlinie in die Höhe, wie gehörig.

73.

Wäre das Polygon ein Viereck, so wäre der Inhalt nach der obigen Formel, wenn die Coordinaten der vier Ecken a und α, b und β, c und γ, d und δ heißen,

$$P = \tfrac{1}{2}[b(\alpha - \gamma) + c(\beta - \delta) + d(\gamma - \alpha) + a(\delta - \beta)] \text{ und}$$
$$P = \tfrac{1}{2}[\alpha(b - d) + \beta(c - a) + \gamma(d - b) + \delta(a - c)]$$

welches beides giebt.

$$167. \quad P = \tfrac{1}{2}[(b - d)(\alpha - \gamma) + (c - a)(\beta - \delta)]$$

Fig. 19. Das heißt der Inhalt des Vierecks ABCD ist

$$168. \quad P = \tfrac{1}{2}(AA''.\, BD'' - DD''.\, CA'')$$

wenn AA'' und DD'' Parallelen mit MC' sind.

Fig. 20. Legt man die Seite AD in die Axe der x, und A in den Anfangs-Punkt der Coordinaten, so sind a, α und $\delta = 0$, und es ist

169. $P = \frac{1}{2}[-(b-d)\gamma + c\beta] = \frac{1}{2}(c\beta + d\gamma - b\gamma)$

das heißt, der Inhalt des Vierecks ist gleich

170. $\frac{1}{2}(AC'.BB' + B'D.CC')$,

also gleich dem Inhalte der Dreiecke ABC' und $B'CD$, woraus ferner folgt, daß die Dreiecke BKC und Dreieck $B'KC'$ gleich groß sind, denn da in der Summe der Dreiecke ABC' und $B'CD$, die den Inhalt des Vierecks ausmachen sollen, das Dreieck $B'KC'$ zweimal und das Dreieck BKC gar nicht vorkommt, so muß eins so groß seyn, als das andere. So verhält es sich auch wirklich, denn weil BB' und CC' parallel sind, so sind die Dreiecke BCC' und $B'CC'$ gleich groß. Zieht man von jedem derselben das nämliche Dreieck KCC' ab, so bleiben die Dreiecke BCK und $B'C'K$ übrig, die also auch gleich groß sind.

Von dieser Art den Inhalt der Polygone durch die Coordinaten seiner Ecken auszudrücken, ist auch oben bei der Analyse der Ebenen und geraden Linien im Raume (§. 35.) Gebrauch gemacht worden.

II. Polyëder.

74.

Auf eine ganz ähnliche Weise findet man den Inhalt von Polyëdern, das heißt von Körpern, die mit Ebenen umschlossen sind. So wie man die Fläche des Polygons durch Summirung von Trapezen erhielt, so erhält man den Inhalt des Polyëders durch Summirung von Prismen, welche die Projectionen der Flächen des Körpers auf eine der Coordinaten-Ebenen zur Grundfläche haben, am entgegengesetzten Ende aber mit der Fläche selbst schräg abgeschnitten sind.

Projicirt man nämlich die äußersten Kanten des Polyëders, das heißt, diejenigen, die zweien Coordinaten-Ebenen entweder am nächsten liegen, oder am weitesten davon entfernt sind, auf

die dritte Coordinaten-Ebene, welches ein geradliniges Polygon gibt, weil keine andere, als gerade Linien vorkommen, so werden zwei verschiedene Theile von der Oberfläche des Polyëders, beide zugleich, über dieser Projection liegen, und zwar eine über der andern. Beide zusammen machen die ganze Oberfläche des Körpers aus. Also werden auch, wenn man die Perpendikel aus den Ecken des Körpers zieht, welche die Projectionen bilden, zwei verschiedene Arten von Prismen entstehen, von welchen beiden die Summe der Grundflächen der Projection gleich ist, die oberen schrägen Seiten aber zusammen die beiden vorhin erwähnten Theile der Oberfläche des Polyëders ausmachen. Zieht man die Summe der einen Art dieser Prismen von der Summe der andern Art ab, so bleibt der Inhalt des Polyëders übrig.

75.

Es kommt also zunächst auf den körperlichen Inhalt eines auf seine Grundfläche perpendiculär stehenden, oben schräg abgeschnittenen Prisma an.

Fig. 21. Das einfachste Prisma ist das dreiseitige. ABC sey der Grundriß eines solchen Prisma, oder die Projection desselben auf seine Grundfläche. Die Höhe des Prisma im Punkt A, oder die Länge der Kante AA', sey $= A$, die Höhe im Punkt B, $= B$, im Punkt C, $= C$, der Inhalt der Grundfläche $= K$. Man lege durch A' eine Ebene $A'B'C'$ mit der Grundfläche parallel, so wird von derselben der untere Theil des Prisma abgeschnitten, dessen Inhalt $= KA$ ist. Es bleibt ein prismatischer Körper übrig, dessen Grundfläche K und dessen Höhe an den drei Kanten o, $B - A$ und $C - A$ ist. B'' sey der höchste von den drei Punkten A', B'' und C''. Man lege eine Ebene durch die horizontale Linie $A'B'$ und durch den obern Punkt C'' der Kante CC'', so schneidet diese Ebene eine Pyramide ab, deren Grundfläche K und deren Höhe $C - A$, deren Inhalt also $= \frac{1}{3} K (C - A)$ ist. Der Rest von dem schräg abgeschnittenen Prisma ist noch eine Pyramide, die das rechtwinkelige Dreieck $AB'B''$, welches von der wagerechten $A'B'$, der obern Kante des Prisma $A'B''$ und dem Theil $B - A$ der Kante $B''B$ gebildet wird, zur Grundfläche, und das Perpendikel

$C''P'$ aus dem obersten Punkt der Kante CC'' auf die vorhin beschriebene Grundfläche zur Höhe hat.

Der Inhalt der Grundfläche dieses pyramidalen Restes ist, wenn die Seite AB der Grundfläche α heißt, $= \frac{1}{2} a (B - A)$. Das Perpendikel ist $\frac{2K}{a}$, also ist der körperliche Inhalt

$$\frac{1}{3} \frac{2K}{a} \cdot \frac{1}{2} a (B - A) = \frac{1}{3} K (B - A).$$

Nun ist der körperliche Inhalt des schräg abgeschnittenen Prisma der Summe des Inhalts der drei Körper gleich, in welche es zerschnitten wurde, also ist solcher $= AK + \frac{1}{3}(C - A) K + \frac{1}{3}(B - A) K =$

$$171.\quad \frac{1}{3} K (A + B + C),$$

das heißt, der Inhalt eines schräg abgeschnittenen Prisma ist gleich der Grundfläche, multiplicirt mit dem dritten Theile der Summe seiner, auf die Grundfläche senkrechten, Kanten.

76.

Wenn nun die Coordinaten der Punkte A, B, C in der Grundfläche, wie oben a und α, b und β, c und γ heißen, so ist diese Grundfläche, zufolge (165. §. 72.)

$$K = \frac{1}{2} [b(\alpha - \gamma) + c(\beta - \alpha) + a(\gamma - \beta)],$$

also ist der körperliche Inhalt des schräg abgeschnittenen dreiseitigen Prisma

$$172.\quad = \frac{1}{6} [A + B + C] [b(\alpha - \gamma) + c(\beta - \alpha) + a(\gamma - \beta)].$$

77.

Fig. 22. Zunächst auf das dreiseitige Prisma folgt in der Einfachheit das vierseitige. ABCD sey der Grundriß oder die Grundfläche eines solchen. Die Bezeichnung der Coordinaten soll wie oben seyn; die Länge der Kanten AA', BB', CC', DD' aber soll A, B, C, D heißen. Man theile die Grundfläche mittelst der geraden Linie BC in zwei Dreiecke, ABC und BCD, so wird das Prisma, wenn man über BC eine senk-

rechte Ebene errichtet, in zwei dreiseitige Prismen getheilt. Der Inhalt derselben ist, dem vorigen gefundenen Ausdruck zufolge,

$$173. \begin{cases} \frac{1}{6}(A+B+C[b(\alpha-\gamma)+c(\beta-\alpha)+a(\gamma-\beta)] \text{ und} \\ \frac{1}{6}(B+C+D[c(\beta-\delta)+d(\gamma-\beta)+b(\delta-\gamma)] \end{cases}$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke ist also der Inhalt des schräg abgeschnittenen vierseitigen Prisma.

So kann man weiter verfahren, wenn die Prismen mehrere Seiten haben, oder wenn die Ebenen, welche das Polyëder umschließen, mehrseitige Figuren sind.

78.

Um aber nicht in weitläufige Rechnung zu verfallen, mag als Beispiel des Verfahrens nur die dreiseitige Pyramide oder das Tetraëder, als das einfachste Polyëder, dienen.

Fig. 23. A, B, C und D sollen die Projectionen seiner vier Ecken auf die Ebene der xy vorstellen. Die Coordinaten dieser Ecken sollen seyn.

$$MA_{,}=a,\ AA_{,}=\alpha,\ AA'=A$$
$$MB_{,}=b,\ B_{,}B=\beta,\ BB'=B$$
$$MC_{,}=c,\ C_{,}C=\gamma,\ CC'=C$$
$$MD_{,}=d,\ D_{,}D=\delta,\ DD=D.$$

Hier kommen nun vier schräg abgeschnittene Prismen vor, eines über ABC, eines über BCD, eines über CDA und eines über DAB.

Nach dem obigen Ausdrucke ist der Inhalt des Prisma

über $ABC=\frac{1}{6}(A+B+C)(b\alpha-a\beta+c\beta-b\gamma+a\gamma-c\alpha)$

desjenigen über $BCD=\frac{1}{6}(B+C+D)(b\delta-d\beta+c\beta-b\gamma+d\gamma-c\delta)$

desjenigen über $CDA=\frac{1}{6}(C+D+A)(d\alpha-a\delta+c\delta-d\gamma+a\gamma-c\alpha)$

desjenigen über $DAB=\frac{1}{6}(D+A+B)(b\alpha-a\beta+d\beta-b\delta+a\delta-d\alpha)$

Zieht man von den drei letzten den ersten ab, so erhält man den Inhalt der Pyramide, welcher P heißen soll, wie folgt

$$174.\quad P = \tfrac{1}{6}\left\{\begin{array}{l}(b\alpha - a\beta)(D - C) + (c\beta - b\gamma)(D - A)\\ \quad + (a\gamma - c\alpha)(D - B)\\ + (d\beta - b\delta)(A - C) + (a\delta - d\alpha)(B - C)\\ \quad + (c\delta - d\gamma)(A - B.)\end{array}\right.$$

Legt man den Anfangs-Punkt der Coordinaten in eine Ecke, z. B. in die Ecke A, so sind a, α und $A = o$, dann also ist

$$175.\quad P = \tfrac{1}{6}[(c\beta - b\gamma)D + (b\delta - d\beta)C + (d\gamma - c\delta)B]$$

Diesen nämlichen Ausdruck findet unter andern Lagrange in seiner Abhandlung über die Pyramide (Mémoires de l'academie de Berlin 1773. S. 159, 151 und 91), aber auf einem andern Wege.

Legt man den Punkt A in den Anfangs-Punkt der Coordinaten, AC in die Axe der x und B, in die Ebene der xy, so sind a, α, A, γ, C und $B = o$, also ist alsdann

$$P = \tfrac{1}{6} c \beta D,$$

nämlich gleich der Grundfläche der Pyramide, multiplicirt mit $\frac{1}{3}$ der Höhe, wie gehörig.

3.

Einige Bemerkungen über die dreiseitige Pyramide.

79.

Die dreiseitige Pyramide oder das Tetraëder ist der einfachste von Ebenen umschlossene Körper, so wie das Dreieck die einfachste geradlinige Figur in der Ebene ist; denn mit weniger als drei geraden Linien kann keine Figur in der Ebene, mit weniger als vier Ebenen kein körperlicher Raum umschlossen werden. Deshalb fangen die Untersuchungen über die von Ebenen umschlossenen Körper gewöhnlich beim Tetraëder an.

Vortreffliche Bemerkungen über das Tetraëder, in so fern es auf das ankommt, was nicht schon die Elementar-Geometrie enthält, haben bekanntlich geliefert Euler, in den Memoiren der Petersburger Academie, Lagrange in den Memoiren der Berliner Academie von 1773, de Gua in den Pariser Memoiren von 1783, Carnot in der Géometrie de position, Monge und Hachette in der Correspondance sur l'école polytechnique, neuerdings ein Ungenannter im ersten Bande der Annalen der Mathematik von Gergonne u. s. w. Vor allen ist bekanntlich die Abhandlung von Lagrange in den Berliner Memoiren von 1773 eine, der Hand des großen Meisters würdige Arbeit, obgleich sie der Verfasser vielleicht mehr dazu bestimmte, die Kraft der Analyse zu zeigen, als Neues an seinem Gegenstande zu finden, gleichsam als diente der Gegenstand nur mehr zu einem zufälligen Stoff der scharfsinnigsten Methode; denn in der That können mehrere Resultate kürzer gefunden werden. Da nun aber die Sätze, selbst

von dem einfachen Dreieck noch immer nicht erschöpft zu seyn scheinen, so groß auch ihre Zahl schon ist, so scheinen noch weit weniger die Sätze vom zusammengesetzteren Tetraëder geschlossen. Wahrscheinlich rücken die Untersuchungen über dasselbe auch deshalb weniger schnell fort, weil der Gegenstand um Vieles verwickelter ist.

Wenigstens zu entschuldigen ist also ein fortgesetztes Bemühen um diesen Gegenstand, und wenn gleich die Ausbeute nicht groß seyn kann, wo solche Meister vorgearbeitet haben, so ist es doch wenigstens nützlich, von Neuem an diesen Gegenstand und an jene Arbeiten zu erinnern.

80.

Was man gewöhnlich bei der Pyramide untersucht, sind die Ausdrücke der Winkel, welche die umschließenden Ebenen mit einander machen, durch die Winkel der Seiten oder die Seiten selbst, und umgekehrt; der körperliche Inhalt der Pyramide, die Halbmesser der durch die Ecken gehenden und der die Fläche innen berührenden Kugeln, der Schwerpunkt, die Schnitte der Pyramiden mit beliebigen Ebenen, die Eigenschaften der gegenüber liegenden Seiten u. s. w. Ueber einige dieser Gegenstände werde ich hier einige Bemerkungen machen, auch noch eine dritte Kugel untersuchen, die sonst weniger betrachtet worden, nämlich die Kugel, welche die Seiten der Pyramide von innen berührt.

81.

Nicht für die Pyramide allein, sondern für Körper überhaupt, die von Ebenen umschlossen sind, scheinen folgende Benennungen passend, deren ich mich also bedienen werde. Die Ebenen, welche einen Körper umschließen, sollen E b e n e n d e s K ö r p e r s heißen; die Durchschnitte je zweier dieser Ebenen oder die Kanten, S e i t e n d e s K ö r p e r s; die Winkel, welche diese Seiten mit einander machen, in den Ebenen der Seiten, S e i t e n w i n k e l d e s K ö r p e r s; die Winkel, welche die Ebenen des Körpers mit einander machen, E b e n e n = W i n k e l d e s K ö r p e r s; die körperlichen Ecken, welche drei oder mehrere in einen Punkt zusammenstoßende Ebenen begrenzen, E c k e n

des Körpers; die Spitzen der Ecken, Scheitel des Körpers.

So hat eine dreiseitige Pyramide oder ein Tetraëder 4 Ebenen, 6 Seiten, 12 Seiten-Winkel, 6 Ebenen-Winkel, 4 Ecken und 4 Scheitel.

Ausdruck einer Ebene des Tetraëders durch die drei übrigen Ebenen und die Ebenen-Winkel.

82.

Bekanntlich haben viele Sätze von dem Tetraëder eine merkwürdige Aehnlichkeit mit gleichartigen Sätzen vom Dreiecke. Einer von solchen Sätzen ist der, welcher eine der Ebenen des Tetraëders aus den andern dreien und den Ebenen-Winkeln giebt.

So wie nämlich das Quadrat der Seite eines Dreiecks gleich ist der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten nach Abzug des doppelten Produkts derselben, multiplicirt in den Cosinus des Winkels, den sie einschließen: so ist das Quadrat der Ebene eines Tetraëders gleich der Summe der Quadrate der drei übrigen nach Abzug der doppelten Produkte je zweier von den letzten, multiplicirt in den Cosinus des Winkels, den sie einschließen.

Dieser Satz gilt sogar allgemein für Polyëder, wie ein ähnlicher Satz für Polygone. De Gua findet ihn, glaube ich, nur für den Fall, daß die Winkel zwischen den drei Flächen, welche die vierte geben, rechte sind. Folgender Beweis, der dem für Polygone ähnlich ist, und den unter andern auch Carnot in der Géometrie de position §. 262., obgleich nicht ganz deutlich, mittheilt, ist sehr einfach. Ich erwähne des Satzes und seines Beweises, weil Letzterer nicht sehr bekannt ist.

Jede der vier Ebenen eines Tetraëders ist nämlich so groß, als die Summe der Projectionen der drei übrigen auf sie. Die Projection einer Ebene auf eine andere aber findet man, wenn man sie mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den die beiden Ebenen einschließen, wovon oben bei der Analyse der Ebenen

(§. 33. und 35.) ein Beweis steht. Heißen also die vier Ebenen eines Tetraëders a, b, c, d, und werden die sechs Winkel, die sie mit einander machen, durch (ab), (ac), (ad), (bc), (bd) und (cd) bezeichnet, so ist

$$d = a \cos.(ad) + b \cos.(bd) + c \cos.(cd)$$
$$a = b \cos.(ba) + c \cos.(ca) + d \cos(da)$$
$$b = c \cos.(cb) + d \cos.(db) + a \cos.(ab)$$
$$c = d \cos.(dc) + a \cos.(ac) + b \cos.(bc).$$

Man multiplicire die erste dieser vier Gleichungen mit d, die zweite mit a, die dritte mit b, die vierte mit c, so kommt

$$d^2 = ad \cos.(ad) + bd \cos.(bd) + cd \cos(cd)$$
$$a^2 = ba \cos.(ba) + ca \cos.(ca) + da \cos.(da)$$
$$b^2 = cb \cos.(cb) + db \cos.(db) + ab \cos.(ab)$$
$$c^2 = dc \cos.(dc) + ac \cos.(ac) + bc \cos.(bc).$$

Nun ziehe man die Summe der drei letzten Gleichungen von der ersten ab, so kommt

$$d^2 - a^2 - b^2 - c^2 = -2ab \cos.(ab) - 2ac \cos.(ac) - 2bc \cos.(bc)$$

oder

176. $$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos.(ab) - 2ac \cos.(ac) - 2bc \cos.(bc),$$

welches heißt: das Quadrat der Ebene d des Tetraëders ist gleich der Summe der Quadrate der drei andern Ebenen a, b und c nach Abzug der doppelten Produkte je zweier derselben, multiplicirt in den Cosinus des Winkels, den sie einschließen.

Gleiches gilt von Polyëdern und wird auch auf dieselbe Weise bewiesen. Das Quadrat einer Seite eines beliebigen Polyëders ist gleich der Summe der Quadrate der übrigen Seiten nach Abzug der doppelten Produkte je zweier Seiten, multiplicirt in den Cosinus des Winkels, den sie einschließen.

In der Correspondance sur l'école polytechnique, tom. I. S. 415 steht ein Beweis des Satzes für das Tetraëder, der weitläuftiger ist. Schließen die drei Ebenen des Tetraëders

rechte Winkel ein, so sind ihre Cosinus $=0$, also ist in diesem Falle für die Pyramide

$$177. \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

welches der bekannte Satz ist, daß die Summe der Quadrate dreier Flächen eines Tetraëders, wenn sie mit einander rechte Winkel machen, dem Quadrat der vierten Fläche gleich ist. Für diesen besondern Fall ist der obige Beweis noch kürzer. Er kommt oben bei der Analyse der Ebenen 2c. (§. 33.) vor.

Umschriebene Kugel.

83.

Was der umschriebene Kreis für das Dreieck ist, ist die umschriebene Kugel für die Pyramide. In ihrer Oberfläche liegen alle vier Scheitel der Pyramide zugleich, so wie in dem umschriebenen Kreise die drei Scheitel des Dreiecks, und so wie es um jedes Dreieck einen Kreis giebt, weil drei Punkte einen Kreis bestimmen, so giebt es um jede Pyramide eine Kugel, weil vier Punkte eine Kugelfläche bestimmen.

Den Halbmesser dieser umschriebenen Kugel und dann daraus weiter die Lage des Mittelpunkts der Kugel kann man auf verschiedene Weise finden.

84.

Man kann nämlich den bekannten allgemeinen Ausdruck des Inhalts der Pyramide durch die Seiten, auf die vier gleichschenkligen Pyramiden anwenden, in die sich die gegebene Pyramide zertheilen läßt, und deren Grundflächen die vier Ebenen derselben sind, deren Scheitel aber alle vier in dem Mittelpunkt der umschriebenen Kugel liegen. Addirt man diese Ausdrücke für diese vier gleichschenkligen Pyramiden, in welchen der Halbmesser der umschriebenen Kugel, oder der gleiche Schenkel die unbekannte Größe ist, so ist die Summe dem Inhalt der ganzen Pyramide gleich, welcher bekannt ist. Man kann also aus der Gleichung, die dieser Ausdruck giebt, den Halbmesser der umschriebenen Kugel

finden. So verfährt Carnot in seiner Abhandlung über das Verhältniß zwischen den Entfernungen von fünf Punkten im Raume. Es wäre aber zu wünschen, daß daselbst die zu der Auflösung nöthige Rechnung näher angegeben wäre, denn ohne besondere Kunstgriffe ist sie beschwerlich, und führt selbst scheinbar auf höhere Gleichungen.

85.

Ein anderes Mittel, den Halbmesser der umschriebenen Kugel zu finden, ist die Rechnung mit Coordinaten. Legt man nämlich den Anfangs-Punkt der Coordinaten in den einen Scheitel der Pyramide, so daß die Coordinaten dieses ersten Scheitels o sind, die eine Seite der Pyramide aber, deren Länge a heißen soll, in die Axe der x, so daß die Coordinaten des zweiten Scheitels b, o und o sind, heißen ferner die Coordinaten des dritten Scheitels, der in der Grundfläche der xy liegt, b und β, und die Coordinaten des vierten Schnittes c, γ und C, die Coordinaten des Mittelpunkts der umschriebenen Kugel aber p, q, r und der Halbmesser der Kugel R, so ist, wie leicht zu sehen,

$$R^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

$$R^2 = (p-a)^2 + q^2 + r^2$$

$$R^2 = (p-b)^2 + (q-\beta)^2 + r^2$$

$$R^2 = (p-c)^2 + (q-\gamma)^2 + (r-C)^2$$

woraus p, q, r und R können gefunden werden. Zieht man nämlich die Gleichungen der Reihe nach von der ersten ab, so kommt

$$o = 2ap - a^2$$

$$o = 2bp - b^2 + 2q\beta - \beta^2$$

$$o = 2cp - c^2 + 2q\gamma - \gamma^2 + 2rC - C^2$$

Aus der ersten dieser drei Gleichungen folgt

$p = \frac{1}{2}a$, welches, in die zweite gesetzt,

$$o = ba - b^2 + 2q\beta - \beta^2 \text{ oder } q = \frac{b^2 + \beta^2 - ba}{2\beta}$$

giebt. Dieses und den Werth von p in die dritte gesetzt, giebt

$$o = ac - c^2 + \frac{b^2 + \beta^2 - ab}{\beta} \cdot \gamma - \gamma^2 + 2rC - C^2, \text{ also}$$

$$r = \frac{(c^2 + \gamma^2 + c^2)\beta + ac\beta + (b^2 + \beta^2 - ab)\gamma}{2C\beta}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts der umschriebenen Kugel sind also

$$178. \begin{cases} p = \frac{1}{2}a \\ q = \dfrac{b^2 + \beta^2 - ab}{2\beta} \\ r = \dfrac{(c^2 + \gamma^2 + C^2)\beta + ac\beta + (b^2 + \beta^2 - ab)\gamma}{2C\beta} \end{cases}$$

und aus $R^2 = p^2 + q^2 + r^2$ findet sich nunmehr der Halbmesser der Kugel.

Verlangt man aber die Coordinaten und den Halbmesser durch die Seiten der Pyramide ausgedrückt, nicht, wie hier, durch die Coordinaten der Scheitel, so ist noch der Ausdruck der ersten durch die letzten nöthig, welcher noch besondere und ziemlich weitläuftige Rechnungen erfordert.

Auf diese zweite Methode den Halbmesser zu finden, kommt das Verfahren von Lagrange in der oben erwähnten Abhandlung hinaus. Daselbst werden allgemein die Entfernungen eines gegebenen Punkts im Raume von den vier Scheiteln der Pyramide gesucht, welches den Halbmesser der umschriebenen Kugel giebt, wenn man diese Entfernungen gleich groß setzt.

86.

Ein drittes Mittel, den Halbmesser der Kugel zu finden, wäre, wenn man die Gleichungen der auf die vier dreieckigen Seiten-Ebenen der Pyramide senkrecht stehenden und durch die Mittelpunkte der um diese Dreiecke beschriebenen Kreise gehenden

geraden Linien und daraus die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts dieser Linien und die Entfernungen des Durchschnitts-Punkts von den Scheiteln der Pyramide suchte; denn jene senkrechten Linien schneiden sich, wie sich weiter unten zeigen wird, alle in einem Punkte, welcher der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel ist. Doch ist auch auf diesem Wege der Ausdruck der Coordinaten der Scheitel durch die Seiten nöthig, wenn man den Halbmesser der Kugel, wie gewöhnlich, durch die Seiten verlangt.

87.

Ein viertes Mittel, welches den Halbmesser unmittelbar durch die Seiten der Pyramide giebt, ist Folgendes:

Fig. 24. ABCD sey die gegebene Pyramide, deren 6 Seiten $AD=a$, $CD=b$, $BD=c$, $BC=d$, $BA=e$, $AC=f$ sind. Die Winkel zwischen den Ebenen der Pyramide, welche in den Seiten a, b, c, d, e, f zusammenstoßen, sollen A, B, C, D, E, F heißen, so daß z. B. der Winkel, den die Ebenen ADB und ADC mit einander machen, A heißt.

Nun sey $PMM'N'$ eine Ebene, die auf den beiden Flächen ACB und CDB zugleich senkrecht steht, nämlich eine Ebene, die durch die beiden, auf der genannten Ebene senkrechten geraden Linien MM' und $N'M'$ geht. Diese Ebene wird auch auf dem Durchschnitt D der beiden Ebenen senkrecht stehen, und ihre Gestalt wird (Fig. 25.) $MM'NP$ seyn. Da in dem Vierecke $M'N'PM$ bei M' und N' rechte Winkel sind, so liegen die vier Ecken desselben in einem Kreise, aber weil M und N' rechte Winkel sind, liegen auch die drei Punkte M', N', P, so wie die andern drei M', M, P, in Halbkreisen. Folglich ist $M'P$ des Kreises Durchmesser. Der Durchmesser des um das Dreieck $MN'P$ beschriebenen Kreises ist aber, wie bekannt, $=\frac{MN'}{\text{Sin. } D}$, also ist

$$M'P=\frac{MN'}{\text{Sin. } D}$$

oder weil $MN'^2 = MP^2 + N'P^2 - 2MP.N'P.\cos.D$ ist,

$$179.\quad M'P^2 = \frac{MP^2 + N'P^2 - 2MP.NP\cos.D}{\sin.D.}$$

Dieser Ausdruck für $M'P$ gilt allgemein für zwei beliebige auf die Ebene ABD und ABC senkrecht stehende und sich schneidende gerade Linien MM' und $M'N'$.

Fig. 24. Nun liegt der Mittelpunkt der Kugelfläche, die durch die vier Scheitel der Pyramide geht, in dem Durchschnitte der vier auf ihren Ebenen senkrecht stehenden und durch die Mittelpunkte der um dieselben beschriebenen Kreise gehenden geraden Linien. Denn da z. B. der Mittelpunkt M des Kreises um die Grundfläche BCD von den drei Scheiteln B, C und D gleich weit entfernt ist, so kann der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel nur in einem Perpendikel auf BCD liegen, welches durch M geht; denn jeder Punkt dieses Perpendikels ist gleich weit von B, C und D entfernt. Eben so kann der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel nur in einem Perpendikel auf die Ebene ACB liegen, welches durch den Mittelpunkt N' des um sie beschriebenen Kreises geht. Denn wiederum nur von jedem Punkt dieses Perpendikels sind die drei Ecken A, C und B gleich weit entfernt. Folglich müssen jene beiden Perpendikel, und überhaupt die Perpendikel durch die Mittelpunkte der Seiten-Ebenen der Pyramide, sich in einem Punkt schneiden, und zwar in dem Mittelpunkte der umschriebenen Kugel.

Läßt man also, wie vorhin, M und N' die Mittelpunkte der um die Seiten-Ebenen der Pyramiden BDC und BAC beschriebenen Kreise seyn, so gibt der obige Ausdruck für $M'P$ die senkrechte Entfernung des Mittelpunkts der umschriebenen Kugel von der Seite d. Daraus aber folgt unmittelbar der Ausdruck für den Halbmesser der Kugel, $M'B = M'C = M'D = M'A$, denn da $M'PB$ ein rechter Winkel ist, so ist

$$180.\quad M'B^2 = M'P^2 + PB^2.$$

Es kommt jetzt nur darauf an, die in der Gleichung für $M'P$ (179.) vorkommenden Linien in der Seite der Pyramide auszudrücken.

Es war $M'P^2 = \frac{MP^2 + N'P^2 - 2MP.N'P \cos. D}{\sin. D}$. Hier sind MP und N'P die senkrechten Abstände der Mittelpunkte M und N' der Kreise um DCB und ACB von der gemeinschaftlichen Seite d. Da CN'B und CMB gleichschenklige Dreiecke sind, so ist CP = BP, also BP = $\frac{1}{2}$d.

Wenn ferner die Winkel CAB und CDB, δ und α heißen, so sind auch die halben Winkel am Mittelpunkt BN'P = δ und BMP = α, also ist

$$NP = \tfrac{1}{2} d \cot. \delta.$$

$$MP = \tfrac{1}{2} d \cot. \alpha,$$

also ist

$$M'P^2 = \tfrac{1}{4} d^2 \frac{\cot. \alpha^2 + \cot. \delta^2 - 2\cot. \alpha. \cot. \delta. \cos. D}{\sin. D^2}$$

und weil für die Halbmesser der Kugel $M'B^2$ oder $R^2 = M'P^2 + PB^2 = M'P^2 + \frac{1}{4}d^2$ war (180.),

$$R^2 = \tfrac{1}{4} d^2 \left[\frac{\cot. \alpha^2 + \cot. \delta^2 - 2\cot. \alpha. \cot. \delta. \cos. D}{\sin. D^2} + 1\right] \text{ oder}$$

$$R^2 = \frac{d^2}{4 \sin. D^2}[\cot. \alpha^2 + \cot. \delta^2 - 2\cot. \alpha \cot. \delta \cos. D + \sin. D^2]$$

oder

$$R^2 = \frac{d^2}{4 \sin. D^2}[1 + \cot. \alpha^2 + \cot. \delta^2 + \cot. \alpha^2 \cot. \delta^2 - \cot. \alpha^2 \cot. \delta^2 - \cos. D^2 - 2\cot. \alpha \cot. \delta \cos. D] \text{ oder}$$

$$R^2 = \frac{d^2}{4 \sin. D^2}[(1 + \cot. \alpha^2)(1 + \cot. \delta^2) - (\cot. \alpha \cot. \delta + \cos. d)^2]$$

oder

$$R^2 = \frac{d^2}{4 \sin. D^2}[\operatorname{cosec.} \alpha^2 \operatorname{cosec.} \delta^2 - (\cot. \alpha \cot. \delta + \cos. D)^2]$$

oder

$$181.\quad R^2 = \frac{d^2}{4 \sin. D^2 \sin. \alpha^2 \sin. \delta^2}[1 - (\cos. \alpha \cos. \delta + \sin. \alpha \sin. \delta \cos. D)^2]$$

Um den Winkel D auszudrücken, sey A′L aus dem Scheitel A auf d, A′K und LG auf c und AH auf LG senkrecht, so ist A′L = e sin. λ, AL = A′L cos. D, also AL = e sin. λ cos. D, AH = AL sin. ALH, und weil ALH = LBG = ε, AH = AL sin. ε, also weil AL = e sin. λ cos. D war,

$$AH = e \sin. \lambda \sin. \varepsilon \cos. D.$$

Von der andern Seite ist AH = KB — BG = e cos. μ — LB cos. ε, und weil LB = e cos. λ,

$$AH = e (\cos. \mu - \cos. \lambda \cos. \varepsilon),$$

also ist, wenn man beide Ausdrücke für AH gleich setzt,

$$e \sin. \lambda \sin. \varepsilon \cos. D = e (\cos. \mu - \cos. \lambda \cos. \varepsilon),$$

woraus folgt

$$182. \quad \cos. D = \frac{\cos. \mu - \cos. \lambda \cos. \varepsilon}{\sin. \lambda \sin. \varepsilon}$$

Setzt man diesen Ausdruck für cos. D in den obigen Ausdruck für R^2 (181.), so kommt

$$183. \quad R^2 = \frac{d^2}{4 \sin. D^2 \sin. \alpha^2 \sin. \delta^2} \Big[1 - \Big(\cos. \alpha \cos. \delta + \frac{\sin. \alpha \sin. \delta}{\sin. \varepsilon \sin. \lambda} (\cos. \mu - \cos. \lambda \cos. \varepsilon) \Big)^2 \Big]$$

Es ist aber in dem Dreieck BCD, $\frac{\sin. \alpha}{\sin. \varepsilon} = \frac{d}{b}$, und in dem Dreieck BCA′, $\frac{\sin. \delta}{\sin. \lambda} = \frac{d}{f}$, weil sich die Seiten eines Dreiecks wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten, also ist

$$R^2 = \frac{d^2}{4 \sin. D^2 \sin. \alpha^2 \sin. \delta^2} \Big[1 - \Big(\cos. \alpha \cos. \delta + \frac{d^2}{bf} (\cos. \mu - \cos. \lambda \cos. \varepsilon) \Big)^2 \Big] \text{ oder}$$

184. $$R = \frac{d}{2\sin. D \sin. \alpha \sin. \delta} \sqrt{\left[1 - \left(\cos. \alpha \cos. \delta + \frac{d^2}{bf}(\cos. \mu - \cos. \lambda \cos. \varepsilon)\right)^2\right]}$$

Nun ist nach der bekannten Formel, welche die Cosinus der Winkel eines Dreiecks aus den drei Seiten gibt,

$$\cos. \mu = \frac{e^2 + c^2 - a^2}{2ec}, \quad \cos. \lambda = \frac{e^2 + d^2 - f^2}{2ed},$$

$$\cos. \varepsilon = \frac{c^2 + d^2 - b^2}{2cd}, \quad \cos. \alpha = \frac{b^2 + c^2 - d^2}{2bc},$$

$$\cos. \delta = \frac{e^2 + f^2 - d^2}{2ef}.$$

Setzt man dieses in den Ausdruck für R (184.), so kommt

$$R = \frac{d}{2\sin. D \sin. \alpha \sin. \delta} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{(b^2+c^2-d^2)(e^2+f^2-d^2)}{4bcef} + \frac{d^2}{bf}\left(\frac{e^2+c^2-a^2}{2ec} - \frac{(e^2+d^2-f^2)(c^2+d^2-b^2)}{4d^2ec}\right)\right)^2\right]}$$

oder

$$R = \frac{d}{8\sin. D \sin. \alpha \sin. \delta\, bcef} \sqrt{[16b^2c^2e^2f^2 - ((b^2+c^2-d^2)(e^2+f^2-d^2) + 2d^2(e^2+c^2-a^2) - (e^2+d^2-f^2)(c^2+d^2-b^2))^2]}.$$

Von der Wurzel-Größe ist der zweite, zum Quadrat zu erhebende Theil,

$$b^2e^2 + b^2f^2 - b^2d^2 + c^2e^2 + c^2f^2 - c^2d^2 - d^2e^2 - d^2f^2 + d^4 + 2d^2e^2$$
$$+ 2d^2c^2 - 2d^2a^2 - e^2c^2 - e^2d^2 + e^2b^2 - d^2c^2 - d^4 + d^2b^2 + f^2c^2 + f^2d^2 - f^2b^2$$
$$= 2e^2b^2 + 2c^2f^2 - 2d^2a^2$$

Also ist die Wurzel-Größe

$$= 16b^2c^2e^2f^2 - 4(e^2b^2 + c^2f^2 - d^2a^2)^2$$
$$= 4(2bcef - e^2b^2 - c^2f^2 + d^2a^2)(2bcef + e^2b^2 + c^2f^2 - d^2a^2)$$

$$= 4(a^2d^2 - (cf - be)^2)((cf + be)^2 - a^2d^2)$$
$$= 4(ad - cf + be)(ad + cf - be)(cf + be - ad)(cf - be + ad).$$

Also ist

$$185. \quad R = \frac{d\sqrt{[(ad+be+cf)(ad+be-cf)(ad-be+cf)(be+cf-ad)]}}{4\, b\, c\, e\, f \sin.\alpha \sin.\delta \sin.D}$$

Die Grundfläche der Pyramide DCB ist $= \frac{1}{2} c d \sin.\varepsilon$ ihre Höhe $AA' = A'L \sin.D = e \sin.\lambda \sin.D$; also ist der körperliche Inhalt der Pyramide, welcher P heißen mag,

$$P = \tfrac{1}{6} c\, d\, e \sin.\varepsilon \sin.\lambda \sin.D.$$

Nun war aber $\frac{\sin.\alpha}{\sin.\varepsilon} = \frac{d}{b}$ und $\frac{\sin.\delta}{\sin.\lambda} = \frac{d}{f}$, also ist

$$b f \sin.\alpha \sin.\delta = d^2 \sin.\varepsilon \sin.\lambda \text{ und } \sin.\varepsilon \sin.\lambda = \frac{bf}{d^2} \sin.\alpha \sin.\delta$$

folglich ist $P = \frac{1}{6} c\, d\, e \frac{bf}{d^2} \sin.\alpha \sin.\delta \sin.D$ oder

$$P = \frac{b\,c\,e\,f}{6\,d} \sin.\alpha \sin.\delta \sin.D. \quad \text{Daraus folgt}$$

$4\, b\, c\, e\, f \sin.\alpha \sin.\delta \sin.D = 24\, P\, d$, welches der Nenner von R ist; also ist

$$186. \quad R = \frac{\sqrt{[(ad+be+cf)(ad+be-cf)(ad-be+cf)(be+cf-ad)]}}{24\, P}$$

welches der gesuchte Ausdruck für den Halbmesser der umschriebenen Kugel ist.

Die Zerlegung des Zählers in Factoren, welche zu vermuthen war, weil sie bei dem Dreieck Statt findet, und die Pyramide so viel Analogie mit dem Dreieck hat, habe ich sonst nirgend gefunden. Auch in den Lehrbüchern, z. B. bei Legendre, ist der Zähler gewöhnlich nicht zerlegt.

In dieser Gestalt ist der Ausdruck des Halbmessers sehr merkwürdig. Der Zähler ist, wie man leicht bemerken wird, auf dieselbe Weise aus Factoren zusammengesetzt, wie der bekannte Ausdruck des Inhalts eines Dreiecks durch die drei Seiten.

Der Zähler von R würde also gleich dem vierfachen Inhalte eines Dreiecks seyn, dessen Seiten ad, be und cf sind. Die Größen a und d, b und e, c und f aber sind die Seiten der Pyramide, die einander gegenüberstehen, oder nicht zusammenstoßen. Der Ausdruck für R enthält also den sonderbaren Satz, daß der sechsfache Inhalt der Pyramide, multiplicirt mit dem Halbmesser der umschriebenen Kugel, dem Inhalt eines Dreiecks gleich ist, dessen Seiten die Zahlenwerthe der Producte der drei Paare gegenüberstehender, oder nicht zusammenstoßender, Seiten der Pyramide haben.

Kugel, welche die Seiten der Pyramide berührt.

88.

Die Perpendikel aus dem Mittelpunkt dieser Kugel auf die Seiten der Pyramide sind gleich lang, denn sie sind Halbmesser einer Kugel. Zieht man also aus dem Mittelpunkt der Kugel Perpendikel auf die Seiten-Ebenen der Pyramide, so sind auch die Punkte, worin diese Ebenen von den Perpendikeln geschnitten werden, von den Punkten, in welchen die Kugel die Seiten der Pyramide berührt, gleich weit entfernt. (Fig. 24.) Denn wenn z. B. M' der Mittelpunkt der Kugel ist, und M'P, M'Q, M'R die Perpendikel aus demselben auf die drei Seiten BC, CD und DB sind, so sind M'MP, M'MQ und M'MR drei rechtwinklige Dreiecke, in welchen eine Seite MM' allen gemein ist, die Hypotenusen M'P, M'Q, M'R aber gleich lang sind, also sind diese Dreiecke congruent, folglich ist in der Grundfläche MP = MQ = MR. Daraus folgt, daß M der Mittelpunkt des in der Grundfläche BCD beschriebenen Kreises ist, denn es gibt nur einen Punkt, der von den drei Seiten gleich weit entfernt ist. Folglich liegt der Mittelpunkt der Kugel in den geraden Linien, die durch die Mittelpunkte der, in den dreieckigen Seiten-Flächen beschriebenen, Kreise gehen, und auf die vier Seiten-Ebenen der Pyramide senkrecht sind.

89.

Es giebt für jede Pyramide eine umschriebene Kugel oder eine Kugel=Fläche, die durch die vier Ecken geht; denn zufolge des vorigen Absatzes liegt der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel in den Perpendikeln auf die Seiten=Ebenen der Pyramide, die durch die Mittelpunkte der, um diese dreiseitigen Ebenen beschriebenen, Kreise gehen. Diese Perpendikel schneiden sich aber nothwendig in einem und demselben Punkte, weil die Perpendikel aus den Mittelpunkten der umschriebenen Kreise der Seiten=Flächen den Durchschnitt je zwei solcher Flächen, z. B. die Perpendikel MP und N′P den Durchschnitt d allemal in einem und demselben Punkte P treffen, so daß auch die Perpendikel MM′ und M′N′ die in der nämlichen Ebene MPN′M′ liegen, nothwendig sich begegnen müssen. Also giebt es für jede beliebige Pyramide einen Mittelpunkt der umschriebenen Kugel und folglich eine solche Kugel selbst.

Nicht so verhält es sich für die Kugel, welche die Seiten der Pyramide berührt, und nicht für jede Pyramide giebt es eine solche Kugel, sondern die Seiten müssen unter einander, wenn es eine Kugel geben soll, gewisse Verhältnisse haben.

Die Kugel berührt nämlich die Seiten mit den, in die Flächen eingeschriebenen, Kreisen in einerlei Punkte, z. B. in P, Q und R für die Basis BCD, wenn M der Mittelpunkt des in dieselbe eingeschriebenen Kreises ist. Deshalb ist aber, wie bekannt, $PB=QB$, $PC=RC$ und $RD=QD$, also ist z. B., wenn $PB=x$ heißt,

$c-(b-(d-x))=x$, woraus folgt

$x=\frac{1}{2}(c-b+d)$.

In dem nämlichen Punkte P muß aber nothwendig auch der in die Seiten=Fläche ACB beschriebene Kreis die Seite d berühren, wenn die Kugel möglich seyn soll. Also muß auch

$x=\frac{1}{2}(e-f+d)$ und folglich

$\frac{1}{2}(c-b+d)=\frac{1}{2}(e-f+d)$ oder

$c+f=e+b$ seyn.

Für die andern Flächen ist auf dieselbe Weise $e+b=a+d$. Also muß

$$187.\quad a+d=c+f=e+b$$

seyn. Die Größen a und d, c und f, e und b sind die gegenüberstehenden, nicht zusammenstoßenden Seiten der Pyramide, also müssen je zwei nicht zusammenstoßende Seiten der Pyramide zusammen gleich lang seyn, wenn eine Kugel möglich seyn soll, welche die Seiten der Pyramide berührt.

90.

Dieser Satz ist merkwürdig wegen seiner Aehnlichkeit mit dem bekannten Satz bei Figuren in der Ebene von einer geraden Zahl Seiten, wenn sie um einen Kreis liegen, daß nämlich die Summe der einen Hälfte der Seiten abwechselnd genommen, der Summe der andern Hälfte gleich ist. Die sechs Seiten der Pyramide umgeben hier eine Kugel, wie ein Netz; die Kugel ragt durch die Seiten-Flächen hervor. Sie bilden also eine Figur, die um eine Kugel liegt, wie die Figuren in der Ebene, die um Kreise liegen. In der That bilden die sechs Seiten der Pyramide ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen, welches nicht in einer, sondern in vier Ebenen liegt, die in den Diagonalen zusammen stoßen. Denn es sey (Fig. 26.) ABCD die Projection einer Pyramide auf die Ebene des Papiers, so sind AB, BC, CD, DA die vier Seiten des Vierecks, die man entweder als in den beiden obern Ebenen ABC und ACD oder in den beiden untern Ebenen ABD und CBD liegend betrachten kann. Die beiden ersten stoßen in der Diagonale AC, die beiden andern in der Diagonale BD zusammen. Die Diagonalen stehen hier einander gegenüber, wie die Seiten. Der obige Satz ist also nichts anders, als der Satz von Vierecken in einer Ebene um einen Kreis, dessen je zwei gegenüberliegende Seiten zusammen gleich lang sind, auf das Viereck in vier Ebenen um eine Kugel ausgedehnt. Auch selbst der Beweis ist für beide Sätze ganz ähnlich.

91.

Den Halbmesser der Kugel kann man auf demselben Wege finden, wie oben den Halbmesser der umschriebenen Kugelfläche. Es war nämlich dort allgemein

Fig. 24. $$M'P^2 = \frac{MP^2 + N'P^2 - 2MP.N'P\cos.D}{\sin.D^2} \quad (179.)$$

Dieses M'P ist hier der Halbmesser der Kugel selbst. In dem Ausdrucke desselben sind MP und N'P die Halbmesser der in die Seiten-Ebenen BCD und BCA beschriebenen Kreise. Diese sind gleich dem Flächen-Inhalte der Seiten-Ebenen, dividirt durch den halben Umfang. Also, da der Inhalt der Fläche BCD $= \frac{1}{2} cd \sin.\varepsilon$ und derjenige der Fläche ABC $= \frac{1}{2} ed \sin.\lambda$ ist, so ist

$$MP = \frac{cd\sin.\varepsilon}{b+c+d} \text{ und } N'P = \frac{ed\sin.\lambda}{d+e+f}.$$

Nun war aber $\cos.D = \frac{\cos.\mu - \cos.\lambda\cos.\varepsilon}{\sin.\lambda\sin.\varepsilon}$ (182.), also ist hier von dem Zähler des Ausdrucks für $M'P^2$ das dritte Glied

$$2MP.N'P\cos.D = \frac{2d^2ec(\cos.\mu - \cos.\lambda\cos.\varepsilon)}{(b+c+d)(d+e+f)}.$$

Setzt man hierin die Werthe von $\cos.\mu$, $\cos.\lambda$ und $\cos.\varepsilon$, nämlich

$$\cos.\mu = \frac{e^2+c^2-a^2}{2ec}, \quad \cos.\lambda = \frac{e^2+d^2-f^2}{2ed},$$

$$\cos.\varepsilon = \frac{c^2+d^2-b^2}{2cd},$$

so kommt

$$2MP.N'P\cos.D = \frac{2d^2ec\left(\frac{e^2+c^2-a^2}{2ec} - \frac{e^2+d^2-f^2}{2ed}\cdot\frac{c^2+d^2-b^2}{2cd}\right)}{(b+c+d)(d+e+f)}$$

oder

$$2MP.N'P\cos.D = \frac{2d^2(e^2+c^2-a^2)-(e^2+d^2-f^2).(c^2+d^2-b^2)}{2(b+c+d)(d+e+f)}$$

Ferner ist der Inhalt der Dreiecke BCD und ACB nach der bekannten Formel für den Inhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten

$$\tfrac{1}{2} c d \sin. \varepsilon = \tfrac{1}{4} \sqrt{[(b+c+d)(b+c-d)(b-c+d)(c+d-b)]}$$

und

$$\tfrac{1}{2} e d \sin. \lambda = \tfrac{1}{4} \sqrt{[(d+e+f)(d+e-f)(d-e+f)(e+f-d)]}$$

Weil also $MP = \frac{c d \sin. \varepsilon}{b+c+d}$, $N'P = \frac{e d \sin. \lambda}{d+e+f}$ war, so ist

$$MP^2 = \frac{(b+c-d)(b-c+d)(c+d-b)}{4(b+c+d)}$$ und

$$N'P^2 = \frac{(d+e-f)(d-e+f)(e+f-d)}{4(d+e+f)}.$$

Da nun $M'P^2 = \frac{MP^2 + N'P^2 - 2NP \cdot N'P \cos. D}{\sin. D^2}$ war, und $M'P$ der Halbmesser der Kugel ist, der R' heißen soll, so daß

$$R'^2 \sin. D^2 = MP^2 + N'P^2 - 2MP \cdot N'P \cos. D,$$

so ist

$$R'^2 \sin. D^2 = \frac{(b+c-d)(b-c+d)(c+d-b)}{4(b+c+d)} + \frac{(d+e-f)(d-e+f)(e+f-d)}{4(d+e+f)} - \frac{2d^2(e^2+c^2-a^2)-(e^2+d^2-f^2)(c^2+d^2-b^2)}{2(b+c+d)(d+e+f)}$$

oder

188. $$4R'^2 \sin. D^2 (b+c+d)(d+e+f)$$
$$= (b+c-d)(b-c+d)(c+d-b)(d+e+f)$$
$$+ (d+e-f)(d-e+f)(e+f-d)(b+c+d)$$
$$- 4d^2(e^2+c^2-a^2) + 2(e^2+d^2-f^2)(c^2+d^2-b^2)$$

Nun war $a+d = c+f = e+b$ (187.), welches nämlich die Bedingung der Möglichkeit der Kugel ist. Also ist

$$a = e+b-d, \quad f = e+b-c.$$

Setzt man dieses in die vorige Gleichung, so ist

$$4 R'^2 \sin. D^2 (b + c + d)(d + e + f)$$

$$= (b+c-d)(b-c+d)(c+d-b)(d+b-c+2e)$$

$$+ (d+c-b)(d+b-c)(2e-d+b-c)(b+c+d)$$

$$- 4 d^2(e^2+c^2-(e+b-d)^2)+2(e^2+d^2-(e+b-c)^2)(c^2+d^2-b^2)$$

$$= (b-c+d)(d+c-b)[(b+c-d)(b-c+d+2e)$$

$$+(b+c+d)(b-c-d+2e)]$$

$$- 4 d^2(c^2-b^2-d^2-2eb+2ed+2bd)$$

$$+2(d^2-b^2-c^2-2eb+2ec+2bc)(c^2+d^2-b^2)$$

$$= (d^2-(b-c)^2)[b^2-(c-d)^2+b^2-(c+d)^2$$

$$+2e(b+c-d+b+c+d)]$$

$$- 4 c^2d^2+4 b^2d^2+ 4d^4 + 8d^2eb - 8d^3e - 8d^3b + 2d^2c^2 + 2d^4$$

$$- 2d^2b^2-2b^2c^2-2b^2d^2+2b^4 - 2c^4-2c^2d^2 + 2c^2b^2-4c^2eb$$

$$- 4 d^2 eb + 4b^3e + 4c^3e + 4d^2ec - 4 b^2ec + 4c^3 b + 4 d^2 bc$$

$$- 4 b^3 c$$

$$= 2(d^2-b^2-c^2 +2bc)[b^2-c^2-d^2+2eb+2ec]$$

$$- 4c^2d^2+6d^4+2b^4 - 2c^4+4d^2eb-8d^3e-8d^3b-4c^2eb+4b^3e$$

$$+ 4c^3e+4d^2ec-4b^2ec+4c^3b+4d^2bc-4b^3c$$ oder

$$2 R'^2 \sin. D^2 (b + c + d)(d + e + f)$$

$$= b^2d^2-c^2d^2-d^4+2d^2eb+2d^2ec-b^4+b^2c^2+b^2d^2-2b^3e-2b^2ec$$

$$- b^2c^2 + c^4 + c^2d^2 - 2 c^2 eb - 2c^3e + 2b^3c - 2c^3b - 2d^2bc$$

$$+ 4b^2ec + 4c^2eb$$

$$- 2c^2d^2+3d^4+b^4-c^4+2d^2eb-4d^3e-4d^3b-2c^2eb+2b^3e$$

$$+ 2c^3e+2d^2ec-2b^2ec+2c^3b+2d^2bc-2b^3c$$

$$= d^2(2b^2+2d^2+4eb+4ec-2c^2-4db-4ed)$$

$$= 2d^2(b^2+d^2-c^2+2eb+2ec-2ed-2bd)$$ oder

$$R'^2 \sin. D^2 (b+c+d)(d+e+f)$$

$$= d^2 (b^2+d^2-c^2+2eb+2ec-2ec-2ed-2bd)$$

$$=d^2[(b+c-d)2e+(b-d)^2-c^2]$$

$$=d^2[(b+c-d)2e+(b+c-d)(b-d-c)]$$

$$=d^2(b+c-d)(2e+b-d-c),$$

und weil $f=e+b-c$ war, also

$$e+f-d=2e+b-c-d \text{ ist,}$$

$$R'^2 \sin. D^2(b+c+d)(d+e+f)=d^2(b+c-d)(e+f-d).$$

Also ist

$$189.\quad R'^2=\frac{d^2}{\sin. D^2}\ \frac{(b+c-d)(e+f-d)}{(b+c+d)(d+e+f)}$$

Der Inhalt des Dreiecks $A'BC$ heiße Δ, der Inhalt des Dreiecks DCB, Δ', so ist das Perpendikel AL, von A, auf d gleich dem Inhalte des Dreiecks $A'BC$, dividirt durch $\frac{1}{2}d$, also $AL=\frac{2\Delta}{d}$. Nun ist die Höhe der Pyramide $AA'=AL.\sin.D$, also ist die Höhe $AA'=\frac{2\Delta \sin. D}{d}$. Ihre Grundfläche aber ist $DCB=\Delta'$, also ist ihr Inhalt

$$P=\tfrac{1}{3}\Delta'.\frac{2\Delta\sin.D}{d}=\frac{2\Delta\Delta'\sin.D}{3d}$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2}{\sin. D^2}=\frac{4\Delta^2\Delta'^2}{9P^2}.$$

Nun ist nach der Formel für den Inhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten

$$\Delta'^2=\tfrac{1}{16}(b+c+d)(b+c-d)(b-c+d)(c+d-b)$$

$$\Delta^2=\tfrac{1}{16}(d+e+f)(d+e-f)(d-e+f)(e+f-d),$$

also ist

$$\frac{d^2}{\sin. D^2}$$

$$=\frac{(b+c+d)(b+c-d)(b-c+d)(c+d-b)(d+e+f)(d+e-f)(d-e+f)(e+f-d)}{576\,P^2}.$$

Setzt man dieses in den obigen Ausdruck für R'^2, so kommt

$$R'^2 = \frac{(b+c-d)^2(e+f-d)^2(b-c+d)(c+d-b)(d+e-f)(d-e+f)}{576\,P^2}$$

Da nun $c+f=e+b$, also $d+e-f=c-b+d$ und $d-e+f=d+b-c$, so ist

$$R'^2 = \frac{(b+c-d)^2(e+f-d)^2(c-b+d)^2(d+b-c)^2}{576\,P^2} \text{ oder}$$

$$R' = \frac{(b+c-d)(e+f-d)(c-b+d)(d+b-c)}{24\,P}$$

oder weil $a+d=c+f=e+b$, also

$$b+c-d=b+a-f \text{ und } c-b+d=c-a+e$$

$$190. \quad R' = \frac{(a+b-f)(b+d-c)(c+e-b)(e+f-d)}{24\,P}$$

Dieses ist der Ausdruck für den Halbmesser der Kugel, die die Seiten berührt.

92.

Die Größe $a+b-f$ ist die zwiefache Entfernung der Punkte, in welchen die Kugel die Seiten a und b berührt, von dem Scheitel D; denn die Kugel berührt, wie oben bemerkt, die Seiten mit den, in die Seiten-Flächen eingeschriebenen, Kreisen in den nämlichen Punkten. Eben so ist $b+d-c$ die doppelte Entfernung der Punkte, in welchen die Kugel die Seiten b und d berührt, von dem Scheitel C, $c+e-a$ die doppelte Entfernung, in welchen die Kugel die Seite c und e berührt, von dem Scheitel B und $e+f-d$ die doppelte Entfernung der Punkte, in welchen die Kugel die Seite e und f berührt, von dem Scheitel A. Der obigen Formel zufolge ist also der Halbmesser der, die Seiten berührenden, Kugel gleich zwei Drittheilen der Produkte der Entfernungen der Berührungs-Punkte von den vier Scheiteln, dividirt durch den körperlichen Inhalt der Pyramide.

93.

Da die Entfernungen der Berührungs-Punkte von den Scheiteln in zwei verschiedenen Richtungen genommen werden können, so folgt, daß das Product derselben in beiden Richtungen gleich groß sey. Dieses ist eine Eigenschaft der Pyramide, die mit derjenigen des Dreiecks in Rücksicht auf Linien, welche durch seine Scheitel gezogen, in einem und demselben Punkt sich begegnen, Aehnlichkeit hat *).

94.

Der obige Ausdruck für den Halbmesser der die Seiten berührenden Kugel, welchen ich sonst nirgends angetroffen habe, so wie mir überhaupt sonst keine Untersuchung über die Kugel, welche die Seite der Pyramide berührt, bekannt geworden, ist wegen seiner Einfachheit und besonders auch deswegen merkwürdig, daß er rational ist oder keine Wurzel-Größe enthält, wie es bei den Ausdrücken der Halbmesser der in der umschriebenen Kugel und selbst der in und um Dreiecken beschriebenen Kreise der Fall ist. Es folgt daraus, daß es nur eine einzige Kugel giebt, welche die Seiten der Pyramiden berührt, wenn diese sonst die Bedingung erfüllen, daß die Summe der gegenüberstehenden Seiten paarweise gleich groß ist.

95.

Man kann auch den Satz $a + d = c + f = e + b$ noch anders finden. Es ist nämlich klar, daß die Punkte, in welchen je drei in einen Punkt zusammenstoßende Seiten der Pyramiden von der Kugel-Fläche berührt werden, gleich weit von dem Scheitel entfernt seyn müssen, weil die Seiten-Ebenen der Pyramide, die zwischen jenen drei Seiten liegen, die Kugelfläche in Kreisen schneiden und also die Seiten selbst Tangenten von

*) Ich habe von diesen Eigenschaften des Dreiecks in einer besondern kleinen Abhandlung, die in Berlin bei Maurer im Jahr 1816 herausgekommen ist, ausführlicher gehandelt. Auch in der Géometrie de position von Carnot findet man darüber Mehreres, was mir, als ich meine Abhandlung schrieb, nicht bekannt war.

diesem Kreise sind. Nun ist die Entfernung der Berührungs-Punkte vom Scheitel D

im Dreiecke $A'DC$, $=\frac{1}{2}(a+b-f)$
im Dreiecke $A'DB$, $=\frac{1}{2}(a+c-e)$
und im Dreiecke BDC, $=\frac{1}{2}(b+c-d)$; also ist
$a+b-f=a+c-e=b+c-d$, daraus folgt
$b+e=c+f$ und $a+d=b+e$, also
$a+d=c+f=e+b$, wie oben.

96.

Wenn man durch die Scheitel der Pyramide und den Mittelpunkt der Kugel gerade Linien, und dann aus dem Mittelpunkt der Kugel auf die Seiten der Pyramide Perpendikel zieht, die also die Seiten in den Berührungs-Punkten der Kugel schneiden, so bilden die Centrallinien mit den Perpendikeln und den Abständen der Berührungs-Punkte von den Scheiteln rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten von je dreien, die in einem Scheitel zusammenstoßen, gleich groß sind; nämlich: die Entfernung des Scheitels vom Mittelpunkte der Kugel, die ihnen gemeinschaftlich ist, die Perpendikel als Halbmesser der Kugel, und die Abstände der Berührungs-Punkte von den Scheiteln. Diese drei Dreiecke sind also congruent, und folglich auch gleichwinklig. Daraus folgt, daß die Linien aus den Scheiteln durch den Mittelpunkt der Kugel allemal mit den drei Seiten, zwischen welchen sie liegen, gleiche Winkel machen, oder mitten zwischen ihnen hindurchgehen. Dergleichen Linien aus dem Scheitel der Pyramide gezogen, geben also den Mittelpunkt der Kugel, und es folgt daraus, daß sich diese Linien alle vier in einem und demselben Punkt schneiden müssen, nämlich im Mittelpunkt der Kugel.

97.

Sie haben außerdem die Eigenschaften, daß die Punkte, in welchen sie, die den Scheiteln gegenüberstehenden, Seiten-Ebenen der Pyramide schneiden, von den Seiten dieser Ebenen in dem

nämlichen Verhältniß entfernt sind, wie die Scheitel selbst. Ein Beweis dieses Satzes steht in dem dritten Bande der Annalen der Mathematik von Gergon S. 317, wo nur der Satz anders ausgedrückt ist, nämlich: daß die drei Dreiecke, welche die, einem Scheitel gegenüberstehenden drei Seiten der Pyramide zur Grundfläche und den Scheitel zur gemeinschaftlichen Spitze haben, sich eben so verhalten, wie die drei Dreiecke, welche die nämliche Grundlinie, aber den Durchschnitts-Punkt der Scheitel-Linien mit den gegenüberstehenden Ebenen zur gemeinschaftlichen Spitze haben.

Vom Schwerpunkte der Pyramide.

98.

Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in der Mitte der geraden Linie, welche zwei gegenüberstehende Seiten der Pyramide halbirt. Dieser Satz ist bekannt. Er steht z. B. in der Statik von Monge und an andern Orten. Weniger bekannt aber ist vielleicht folgender Beweis, der demjenigen ähnlich ist, welchen ebenfalls Monge davon in der Correspondance sur l'école polytechnique tom. II. S. 1 gegeben hat.

Fig. 27. Wenn F die Mitte von AB ist, und man legt eine Ebene FDC durch F und die gegenüberstehende Seite der Pyramide DC, so liegt offenbar der Schwerpunkt in dieser Ebene, denn auf beiden Seiten der Ebene befinden sich überall gleich große Theile von der Masse der Pyramide in gleichen Entfernungen. Aus demselben Grunde liegt er in der Ebene ADE, wenn E die Mitte von BC ist, folglich in der Durchschnitts-Linie dieser beiden Ebenen, die DH ist, weil sich die Ebenen in den beiden Punkten D und H schneiden. Nicht minder liegt der Schwerpunkt in der Ebene AGB, wenn G die Mitte von DC ist, folglich in dem Durchschnitte der beiden Ebenen AGB und FDC, welcher FG ist, weil sich die Ebenen in den beiden Punkten F und G schneiden. Also liegt der Schwerpunct in den beiden geraden Linien DM und FG zugleich, die sich selbst nothwendig schneiden müssen, weil sie beide

in der Ebene FDC liegen. Folglich ist der Durchschnitt M der beiden geraden Linien FG und DH der Schwerpunkt der Pyramide. Daß aber dieser Durchschnitts-Punkt M in der Mitte der geraden Linie FG liegt, die zwei gegenüberstehende Seiten der Pyramide halbirt, wie behauptet wird, läßt sich, wie folgt, zeigen.

Die Linie FE in der Grundfläche ist mit AC parallel und der Hälfte von AC gleich, weil $BF = \frac{1}{2}BA$, $BE = \frac{1}{2}BC$, also sind die Dreiecke FHE und AHC, weil sie außerdem bei H Scheitel-Winkel haben, ähnlich. Mithin ist auch $FH = \frac{1}{2}HC$, also ist $FH = \frac{1}{3}FC$.

Nun stelle Fig. 27. die Ebene FDC in der Ansicht vor, so ist $FH = \frac{1}{3}FC$ und $DG = \frac{1}{2}DC$. Des letztern wegen ist $HP = PC$, wenn GP mit DH parallel, also ist $HP = FH$. Nun sind aber die Dreiecke FMH und FGP ähnlich, also ist

$$FM = MG,$$

folglich liegt der Schwer-Punkt M in der Mitte der geraden Linie FG, welche die Mitte F und G zweier nicht zusammenstoßender Seiten der Pyramide verbindet.

99.

Aus diesem Satze lassen sich leicht verschiedene andere Eigenschaften des Schwerpunkts der Pyramide herleiten: z. B. daß ein beliebiger Scheitel der Pyramide von der gegenüberstehenden Seiten-Ebene viermal so weit entfernt ist, als der Schwerpunkt. Denn wenn in (Fig. 28.) MN, DQ und GR Perpendikel auf FC sind, so ist $MN = \frac{1}{2}GR$ wegen $FM = \frac{1}{2}FG$. Aber $GR = \frac{1}{2}DQ$ wegen $GC = \frac{1}{2}DC$, also $MN = \frac{1}{4}DQ$. So wie sich aber die Perpendikel in der Ebene FDC auf FC verhalten, so verhalten sich die Perpendikel im Raume auf die Grundfläche ABC Fig. 27., also ist der Perpendikel aus dem Schwerpunkt auf die Grundfläche gleich dem vierten Theil des Perpendikels aus dem Scheitel D auf eben diese Fläche.

100.

Oder der Robervalsche Satz, daß der Schwerpunkt der Punkt der mittleren Entfernungen der Scheitel ist, das heißt, daß die einfache Entfernung des Schwerpunkts von beliebigen Coordinaten = Ebenen der Summe der Entfernungen der vier Scheitel von den nämlichen Ebenen gleich ist; woraus folgt, daß eine durch den körperlichen Raum gleichförmig vertheilte Masse und vier gleich große in den Scheiteln der Pyramide vertheilte Massen einerlei Schwerpunkt haben; denn es sey kyk' in Fig. 26. die Ebene der yz, so ist die Entfernung $FF,$ des Punkts F von derselben, weil F in der Mitte von AB liegt, $= \frac{AA, + BB,}{2}$. Hingegen die Entfernung $GG,$ des mitten zwischen D und C liegenden Punkts G von der Ebene der yz ist $= \frac{DD, + CC,}{2}$.

Nun liegt der Schwerpunkt M in der Mitte von FG, also ist seine Entfernung $MM,$ von der Ebene der yz, $= \frac{FF, + GG,}{2} = \frac{AA, + BB, + CC, + DD,}{4}$, welches für alle drei, und zwar für beliebige Coordinaten = Ebenen gilt, wie behauptet wurde. Lagrange kommt auch in der oben erwähnten Abhandlung auf diesen Satz, aber durch Rechnung.

101.

Daraus, daß der Schwerpunkt in der Mitte der Linie liegt, welche die Mitte zweier gegenüberstehender Seiten der Pyramide verbindet, folgt auch, daß sich die drei geraden Linien, welche die Mitte der drei Paare gegenüberstehender Seiten verbinden, in einem und demselben Punkt schneiden müssen.

102.

Ferner, daß sich die sechs Ebenen durch die sechs Seiten der Pyramide und die Mitten der gegenüberstehenden Seiten in einem und demselben Punkt schneiden, welcher der Schwerpunkt ist; denn derselbe liegt in allen diesen sechs Ebenen zugleich.

Je drei von diesen Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie, die durch einen Scheitel und den Schwerpunkt geht. Dieselben geraden Linien gehen zugleich durch die Schwerpunkte der dem Scheitel gegenüberliegenden Seiten-Ebenen. Auch diese geraden Linien, deren so viel als Scheitel, also viere sind, schneiden sich in einem und demselben Punkte, nämlich im Schwerpunkte der Pyramide.

103.

Es ist unstreitig noch Vieles an der Pyramide zu untersuchen übrig, und wahrscheinlich giebt es noch manche interessante nicht bekannte Sätze. So z. B. haben wahrscheinlich die Ausdrücke für die Entfernungen zwischen den Mittelpunkten der umschriebenen, der eingeschriebenen, der die Seite berührenden Kugel und des Schwerpunkts u. s. w. Aehnlichkeit mit den gleichartigen Sätzen beim Dreiecke. Auch finden wahrscheinlich für die verschiedenen Transversalen durch die Scheitel, sobald sie sich in einem und demselben Punkte schneiden, ähnliche Sätze Statt, wie beim Dreieck. Denn die Aehnlichkeit zwischen den Eigenschaften des Dreiecks und der Pyramide findet sich vielfältig. So z. B. sind bekanntlich die Ausdrücke des Inhalts des Dreiecks durch die Scheitellinien, welche die gegenüberliegenden Seiten halbiren, oder durch die Perpendikel auf die gegenüberliegenden Seiten, dem Ausdruck des Inhalts durch die Seiten selbst ähnlich. Ganz so verhält es sich bei der Pyramide. Wenn nämlich a, b und c drei in einem Punkt zusammenstoßende Seiten der Pyramide bedeuten, so ist bekanntlich der körperliche Inhalt derselben

$$191.\quad P = \tfrac{1}{6} abc \sqrt{[1 - \cos.(ab)^2 - \cos.(ac)^2 - \cos.(bc)^2 + 2\cos.(ab)\cos.(ac)\cos.(bc)]}.$$

Bedeuten dagegen a′, b′, c′ die in dem Schwerpunkt sich schneidenden geraden Linien, welche die Mitte der drei Paare gegenüberstehender Seiten verbinden, welche Linien hier also das seyn würden, was die Scheitellinien beim Dreiecke sind, welche die gegenüberliegenden Seiten halbiren, so ist der Inhalt

$$192.\quad P = \tfrac{1}{3} a'b'c' \sqrt{(1 - \cos(a'b')^2 - \cos.(a'c')^2 - \cos.(b'c')^2 + 2\cos.(a'b')\cos.(a'c')\cos.(b'c')]}$$

Bedeuten a'', b'', c'' die geraden Linien, welche auf je zwei gegenüberstehende Seiten der Pyramide zugleich senkrecht stehen, oder die kürzeste Entfernung der gegenüberstehenden Seiten von einander, welche Linien also hier das seyn würden, was beim Dreiecke die Perpendikel aus den Scheiteln auf die gegenüberliegenden Seiten sind, und $(a''b'')$, $(a''c'')$, $(b''c'')$ die Winkel, welche Parallelen mit jenen Perpendikeln, die in einem Punkte zusammenlaufen, mit einander einschließen, so ist der Inhalt der Pyramide

$$193. \quad P = \frac{a''b''c''}{3\sqrt{[1 - \text{co.}(a''b'')^2 - \text{co.}(a''c'')^2 - \text{co.}(b''c'')^2 - 2\,\text{co.}(a''b'')\,\text{co.}(a''c'')\,\text{co.}(b''c'')]}}$$

Alle diese Ausdrücke, die sich leicht durch das um die Pyramide beschriebene Parallelepipedum zeigen lassen, und die unter andern bei Monge im 2ten Bande der Correspondance sur l'école polytechnique S. 5 vorkommen, haben unter sich eben solche Aehnlichkeit, wie die gleichartigen Sätze beim Dreieck.

4.

Von den drei Kreisen in einem Dreieck, deren jeder die beiden andern und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

104.

Unter den Aufgaben, welche die Annalen der Mathematik von Gergonne, nach der guten Gewohnheit älterer Mathematiker, öffentlich vorzulegen pflegen, befindet sich auch die von den drei Kreisen in einem Dreieck, deren jeder die beiden andern und zwei Seiten des Dreiecks berührt, auf der 196sten Seite des ersten Bandes. In dem nämlichen Bande, Seite 343, melden die Redacteurs, sie hätten längere Zeit umsonst auf eine befriedigende Auflösung gewartet. Sie selbst hätten viele Jahre vergeblich die Auflösung des Problems gesucht, und wären endlich auf eine Auflösung gekommen, die sie mittheilen, die aber, wie die weitere Folge zeigt, den Gegenstand noch nicht erschöpft. Sie besteht im Wesentlichen, wenn man sie in anderen, etwas bequemeren Zeichen ausdrückt, in Folgendem.

105.

Fig. 29. Die Mittelpunkte der verlangten drei Kreise liegen in den drei geraden Linien durch die Scheitel des Dreiecks, welche die Winkel desselben halbiren, denn da z. B. $I'I = ID$ und bei I' und D rechte Winkel sind, so ist $\Delta BII' = \Delta BID$, folglich der Winkel $I'BI$ dem Winkel IBD gleich. In der nämlichen geraden Linie liegt aus demselben Grunde der Mittelpunkt z des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises. Heißen also die Ent=

fernungen der Punkte K, M, N, in welchen der eingeschriebene Kreis die Seiten des Dreiecks berührt, von den Scheiteln, $BK=k$, $CM=m$, $AN=n$, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $=r$ und die Halbmesser der drei gesuchten Kreise $DI=y$, $ER=z$ und $H'H=x$, so ist

$$\frac{BD}{y}=\frac{k}{r} \text{ und } \frac{EC}{z}=\frac{m}{r}, \text{ also}$$

$$BD=\frac{k}{r}y,\ EC=\frac{m}{r}z,$$ folglich, wenn man BD und EC von $BC=a$ abzieht,

$$DE=a-\frac{k}{r}y-\frac{m}{r}z=\frac{ar-ky-mz}{r}.$$

Da nun $IR=y+z$ ist, weil der Berührungs-Punkt der beiden Kreise, deren Halbmesser y und z sind, wie immer, in gerader Linie zwischen ihren Mittelpunkten liegt, und IR, wenn VR mit DE parallel, $=y-z$ ist, so ist auch

$$DE^2=IR^2-IV^2=(y+z)^2-(y-z)^2=4yz,$$

also ist, wenn man beide Ausdrücke von DE einander gleich setzt,

$$\frac{ar-ky-mz}{r}=2\sqrt{(yz)} \text{ oder}$$

$$ar-ky-mz=2r\sqrt{(yz)}.$$

Verwechselt man die Zeichen, indem man immer um Eins weiter fortgeht, so erhält man

$$194.\quad \begin{cases} ar=ky+mz+2r\sqrt{(yz)} \\ br=mz+nx+2r\sqrt{(zx)} \\ cr=nx+ky+2r\sqrt{(xy)} \end{cases}$$

Dieses sind die drei Grundgleichungen, auf welchen die Auflösung der Aufgabe beruht. Man muß also aus denselben die drei unbekannten Größen y, z und x entwickeln, worin eben die Schwierigkeit liegt.

106.

Die Redacteurs der Annalen setzen

$$195.\quad z = y u^2 \text{ und } x = y v^2.$$

Dieses verwandelt die drei Grundgleichungen (194.) in folgende:

$$196.\quad \begin{cases} ar = y(k + mu^2 + 2ru) \\ br = y(mu^2 + nv^2 + 2ruv) \\ cr = y(nv^2 + k + 2rv) \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen giebt

$$197.\quad y = \frac{br}{mu^2 + nv^2 + 2ruv}.$$

Setzt man dieses in die erste und dritte, so kommt

$$198.\quad \begin{cases} a(mu^2 + nv^2 + 2ruv) = b(k + mu^2 + 2ru) \\ c(mu^2 + nv^2 + 2ruv) = b(nv^2 + k + 2rv) \end{cases}$$

Die drei Grundgleichungen sind also jetzt auf zwei reducirt, die nur noch zwei unbekannte Größen, u und v, enthalten, welche zu entwickeln sind.

Man bezeichne den Umfang des gegebenen Dreiecks $a + b + c$ durch s und multiplicire die erste der Gleichungen (198.) durch ckn die zweite durch akm, so kommt

$$ackn(mu^2 + nv^2 + 2ruv) = bckn(k + mu^2 + 2ru)$$
$$ackm(mu^2 + nv^2 + 2ruv) = bakm(k + nv^2 + 2rv)$$

oder

$$199.\quad \begin{cases} (a-b)ckmnu^2 + ackn^2v^2 + 2cknravu \\ \qquad = bcnk^2 + 2bcknru \\ (c-b)akmnv^2 + ackm^2u^2 + 2akmrcvu \\ \qquad = bank^2 + 2bakmrv \end{cases}$$

Nun ist der Flächen-Inhalt des Dreiecks gleich dem halben Umfange, multiplicirt mit dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, also, wenn derselbe Δ heißt,

$$\Delta = \tfrac{1}{2} rs$$

Bekanntlich ist aber auch der Inhalt des Dreiecks

$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{[s(s-2a)(s-2b)(s-2c)]}$, also ist

200. $4r^2 s = (s-2a)(s-2b)(s-2c)$.

Ferner sind die Abstände der Punkte, in welchen der eingeschriebene Kreis zwei Seiten des Dreiecks berührt, von dem Scheitel, in welchem die beiden Seiten zusammenstoßen, gleich groß, also ist

$a-k=m$, $b-m=n$, $c-n=k$, also

$k=c-(b-(a-k))=c-b+a-k$, also

$k=\frac{1}{2}(c-b+a)=\frac{1}{2}(s-2b)$; folglich ist

201. $s-2b=2k$, $s-2c=2m$, $s-2a=2n$,

folglich $4r^2 s = 8kmn$ oder

202. $r^2 s = 2kmn$.

Ferner ist

$s(b-a)=b(s-2a)-a(s-2b)$

$s(b-c)=b(s-2c)-c(s-2b)$,

wie aus sich selbst folgt; also weil $s-2a=2n$, $s-2b=2k$ war (201.),

203. $\begin{cases} s(b-a)=2bn-2ak \text{ und} \\ s(b-c)=2bm-2ck. \end{cases}$

Setzt man die Ausdrücke von kmn, $b-a$ und $b-c$ aus (202. und 203.) in die Gleichungen (199.), so kommt

$$\frac{2ak-2bn}{s}.c.\frac{r^2 s}{2}.u^2+ackn^2v^2+2kncravu$$
$$=bcnk^2+2bcknru \text{ und}$$

$$\frac{2ck-2bm}{s}.a.\frac{r^2 s}{2}.v^2+ackm^2u^2+2akmrcvu$$
$$=bamk^2+2bakmrv^2 \text{ oder}$$

$akcr^2u^2 + akcn^2v^2 + 2akcnruv = bncr^2u^2 + bnck^2$
$+ 2bnckru$ und

$akcr^2v^2 + akcm^2u^2 + 2akcmruv = bmar^2v^2 + bmak^2$
$+ 2bmakrv$ oder

$$204. \begin{cases} akc(r^2u^2 + n^2v^2 + 2nruv) = bnc(r^2u^2 + k^2 + 2ruk) \text{ und} \\ akc(r^2v^2 + m^2u^2 + 2mruv) = bma(r^2v^2 + k^2 + 2rvk) \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten auf beiden Seiten vollständige Quadrate, also ist

$$205. \begin{cases} akc(ru + nv)^2 = bnc(ru + k)^2 \\ akc(rv + mu)^2 = bma(rv + k)^2 \end{cases}$$

107.

Nun sollen die Entfernungen des Mittelpunkts des eingeschriebenen Kreises von den Scheiteln des Dreiecks $AZ = e$, $BZ = f$, $CZ = g$ heißen, so ist z. B. $f^2 = k^2 + r^2$, folglich, weil nach (201.) $k = \frac{1}{2}(s - 2b)$ und nach (202.) $r^2 = \frac{2kmn}{s}$

$$= \frac{(s-2b)(s-2c)(s-2a)}{4s},$$

$$4f^2 = (s-2b)^2 + \frac{(s-2b)(s-2c)(s-2a)}{s} \text{ oder}$$

$$4f^2s = (s-2b)[(s-2b)s + (s-2c)(s-2a)] \text{ oder}$$
$$4f^2s = (s-2b)[s^2 - 2bs + s^2 - 2as - 2cs + 4ac] \text{ oder}$$
$$4f^2s = 2k[2s^2 - 2(a+b+c)s + 4ac]$$

oder weil $a + b + c = s$

$f^2s = 2ack$, also durch Verwechslung der Zeichen

$$206. \begin{cases} f^2s = 2ack \\ g^2s = 2bam \\ e^2s = 2cbn. \end{cases}$$

Setzt man hieraus die Werthe von ack, bam und cbn in die Gleichungen (204.), so kommt

$$207. \begin{cases} f^2(ru+nv)^2 = e^2(ru+k)^2 \\ f^2(rv+mu)^2 = g^2(rv+k)^2 \end{cases}$$

und daraus, wenn man die Quadrat-Wurzel auszieht:

$$208. \begin{cases} f(ru+nv) = e(ru+k) \\ f(rv+mu) = g(rv+k). \end{cases}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt

$$v = \frac{ek-(f-e)ru}{fn}$$

Setzt man dieses in die zweite, so kommt

$$(f-g)r.\frac{ek-(f-e)ru}{fn} = gk - fmu \text{ oder}$$

$$(f-g)rek - fngk = [(f-g)(f-e)r^2 - f^2mn]u$$

woraus folgt

$$209. \begin{cases} u = k\frac{(f-g)re-fng}{(f-g)(f-e)r^2-f^2mn}, \text{ und auf eine ähnliche Weise} \\ v = k\frac{(f-e)rg-fme}{(f-g)(f-e)r^2-f^2mn} \end{cases}$$

Aus (206.) ist $f^2 = \frac{2ack}{s}$ und aus (202.) $mn = \frac{r^2s}{2k}$, also ist $f^2mn = \frac{2ack}{s}.\frac{r^2s}{2k} = r^2ac$, also ist der Nenner von u und v in (209.)

$$= [(f-g)(f-e)-ac]r^2.$$

Ferner ist aus (206.) $f^2 = \frac{2ack}{s}$, $g^2 = \frac{2abm}{s}$, $e^2 = \frac{2bcn}{s}$, also $f^2g^2 = \frac{4a^2bcmk}{s^2}$ oder $f^2n^2g^2 = \frac{4a^2bcmkn^2}{s^2}$, also,

weil $2kmn = r^2 s$ (202.) $f^2 n^2 g^2 = \frac{2a^2 b c r^2 s n}{s^2} = \frac{2bcn}{s} . a^2 r^2$ $= e^2 a^2 r^2$, also ist $fng = ear$.

Setzt man dieses Beides in den Ausdruck von u (209.), so kommt

$$u = k \frac{(f-g) r e - e a r}{r^2 [(f-g)(f-e) - ac]} \text{ oder }$$

210. $\begin{cases} u = \frac{ke}{r} . \frac{f-g-a}{(f-g)(f-e)-ac} \text{ und auf eine ähnliche Weise} \\ v = \frac{kg}{r} . \frac{f-e-c}{(f-g)(f-e)-ac}. \end{cases}$

Daraus folgt

211. $\begin{cases} mu^2 = \frac{mk^2 e^2}{r^2} . \left(\frac{a-g-f}{ac-(f-g)(f-e)}\right) \\ nv^2 = \frac{nk^2 g^2}{r^2} . \left(\frac{c-e-f}{ac-(f-g)(f-e)}\right)^2 \\ 2ruv = \frac{2k^2 eg}{r^2} . \frac{(a+g-f)(c+e-f)}{[ac-(f-g)(f-e)]^2} \end{cases}$

Nun ist vermöge (206.) $mk^2 e^2 = mk^2 . \frac{2cbn}{s} = k . \frac{2kmn}{s} . bc$, also, weil $r^2 s = 2kmn$ (201.) oder $\frac{2kmn}{s} = r^2$ ist,

$mk^2 e^2 = kr^2 bc$. Eben so $nk^2 g^2 = nk^2 . \frac{2bam}{s}$ (206.) $= k \frac{2kmn}{s} . ab = kr^2 ab$ (202.) und $k^2 g^2 e^2 = k^2 \frac{2abm}{s} . \frac{2cbn}{s}$ $= \frac{2ack}{s} . \frac{2kmn}{s} . b^2 = f^2 r^2 b^2$ (206. und 202.), also $kge = fbr$ und $2k^2 eg = 2kfbr$.

Setzt man diese Ausdrücke für $m k^2 e^2$, $n k^2 g^2$ und $2 k^2 e g$ in die Gleichung (211.) so kommt

$$212. \begin{cases} m u^2 = k b c \left(\dfrac{a + g - f}{ac - (f - g)(f - e)} \right)^2 \\ n v^2 = k a b \left(\dfrac{c + e - f}{ac - (f - g)(f - e)} \right)^2 \\ 2ruv = 2 k f b \dfrac{(a + g - f)(c + e - f)}{[ac - (f - g)(f - e)]^2} \end{cases}$$

Nun war $y = \dfrac{b r}{m u^2 + n v^2 + 2 r u v}$ (197.), also ist

$$y = \frac{br(ac-(f-g)(f-e))^2}{kbc(a+g-f)^2+kab(c+e-f)^2+2kbf(a+g-f)(c+e-f)}$$

oder

$$213. \; y = \frac{r}{k} \cdot \frac{(ac-(f-g)(f-e))^2}{c(a+g-f)^2+a(c+e-f)^2+2f(a+g-f)(c+e-f)}$$

welches der gesuchte Halbmesser des einen der drei Kreise, nämlich des Kreises I D ist, der die andern beiden Kreise und die Seiten a und c berührt. Aehnliche Ausdrücke geben die Halbmesser der andern beiden Kreise.

108.

So weit, sagen die Redacteurs der Annalen, wären sie gekommen, als sie von Herrn Bidone, Professor an der Universität zu Turin, benachrichtiget worden, die Auflösung der Aufgabe sey schon früher von Herrn Malfatti, einem ausgezeichneten italienischen Mathematiker, gefunden, und von demselben im Jahre 1803 in dem ersten Theile des zehnten Bandes der Memoiren der italienischen Societät der Wissenschaften bekannt gemacht worden. Was Herr Bidone von der Malfattischen Auflösung den Redacteurs mitgetheilt hat, ist die Beschreibung einer sehr einfachen Construction der Halbmesser. Nach dieser Construction ist der algebraische Ausdruck der Halbmesser nach Malfatti in hiesigen Zeichen folgender:

$$
214.\quad \begin{cases} y = \dfrac{r}{2k}(\tfrac{1}{2}s - r + f - g - e) \\[2ex] z = \dfrac{r}{2m}(\tfrac{1}{2}s - r + g - e - f) \\[2ex] x = \dfrac{r}{2n}(\tfrac{1}{2}s - r + e - f - g) \end{cases}
$$

Diese ungemein einfachen Ausdrücke müssen nun natürlich mit den obigen (213.) stimmen; allein es scheine, sagen die Redacteurs, nicht leicht, die Ausdrücke einen auf den andern zu bringen.

109.

Im zweiten Bande der Annalen, Seite 60, berichten die Redacteurs, sie hätten sich um die Malfattische Auflösung an Herr Bidone gewendet; allein, was sie von ihm erhalten, gebe darüber wenig oder gar keine Auskunft; es bestehe in nicht viel mehr, als: der Angabe der Grund-Gleichungen und der Resultate. Das Malfattische Verfahren war also dadurch noch nicht enthüllt. Die Redacteurs beschäftigen sich nun damit, die Richtigkeit der Malfattischen Formeln so zu zeigen, daß sie rückwärts aus denselben die Grundgleichungen ableiten. Diese Ableitung ist folgende: Die Malfattischen Gleichungen (214.) geben

$$
\begin{aligned} 2ky &= r(\tfrac{1}{2}s - r + f - g - e) \\ 2mz &= r(\tfrac{1}{2}s - r + g - e - f) \\ 2nx &= r(\tfrac{1}{2}s - r + e - f - g) \end{aligned}
$$

Man addire diese Gleichungen zu zweien, so kommt

$$
215.\quad \begin{cases} ky + mz = r(\tfrac{1}{2}s - r - e) \\ mz + nx = r(\tfrac{1}{2}s - r - f) \\ nx + ky = r(\tfrac{1}{2}s - r - g) \end{cases}
$$

Ferner multiplicire man je zwei und zwei in einander, so kommt

$$216. \begin{cases} 4kmyz = r^2[(\tfrac{1}{2}s - r - e)^2 - (f-g)^2] \\ 4mnzx = r^2[(\tfrac{1}{2}s - r - f)^2 - (g-e)^2] \\ 4nkxy = r^2[(\tfrac{1}{2}s - r - g)^2 - (e-f)^2] \end{cases}$$

Man multiplicire die erste dieser letzten drei Gleichungen mit n, die zweite mit k, die dritte mit m, so kommt, weil $2kmn = r^2 s$ (202.)

$$217. \begin{cases} 2syz = n[(\tfrac{1}{2}s - r - e)^2 - (f-g)^2] \\ 2szx = k[(\tfrac{1}{2}s - r - f)^2 - (g-e)^2] \\ 2sxy = m[(\tfrac{1}{2}s - r - g)^2 - (e-f)^2] \end{cases}$$

Nun ist $m + n = b$ aus der Figur, also $b^2 = (m+n)^2$, oder weil $b = \tfrac{1}{2}s - k$ (201.) $b(\tfrac{1}{2}s - k) = (m+n)^2$, oder wenn man mit k multiplicirt, $bk(\tfrac{1}{2}s - k) = m^2k + n^2k + 2kmn$, oder weil $2kmn = r^2 s$ (202.)

$$bk(\tfrac{1}{2}s - k) = m^2k + n^2.k + r^2 s \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}bks = m^2k + n^2k + r^2s + k^2b$$

oder weil $s = 2(b+k)$ ist,

$$\tfrac{1}{2}bks = m^2k + n^2k + 2r^2(b+k) + k^2b.$$

Aber $k^2 = f^2 - r^2$, $m^2 = g^2 - r^2$, $n^2 = e^2 - r^2$ aus der Figur; also ist

$$\tfrac{1}{2}bks = (g^2 - r^2)k + (e^2 - r^2)k + 2r^2b + 2r^2k + (f^2 - r^2)b \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}bks = g^2k + e^2k + r^2b + f^2b.$$

Nun war $fng = ear$ (209.), also auch $gke = fbr$ durch Weiterrücken der Zeichen, folglich ist $0 = 2rbf - 2kge$. Addirt man diese Gleichung zu dem Ausdruck von $\tfrac{1}{2}bks$, so kommt

$$\tfrac{1}{2}bks = (g^2 + e^2)k - 2kge + (r^2 + f^2)b + 2rbf \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}bks = (g-e)^2k + (r+f)^2b.$$

Ferner ist $b = \frac{1}{2}s - k$, also

$$\tfrac{1}{4}ks^2 - \tfrac{1}{2}k^2 s = (g-e)^2 k + (r+f)^2(\tfrac{1}{2}s - k) \text{ oder}$$

$$k(\tfrac{1}{4}r^2 + (r^2+f)^2 - (g-e)^2 = \tfrac{1}{2}s((r+f)^2 + k^2)$$

Hierzu addire man auf beiden Seiten $-ks(r+f)$, so kommt

$$k(\tfrac{1}{4}s^2 - s(r+f) + (r+f)^2 - (g-e)^2) = \tfrac{1}{2}s[k^2 - 2k(r+f) + (r+f)^2] \text{ oder}$$

$$218. \left\{\begin{array}{l} k[(\tfrac{1}{2}s - r - f)^2 - (g-e)^2] = \tfrac{1}{2}s(r+f-k)^2 \\ \quad \text{also auch} \\ m[(\tfrac{1}{2}s - r - g)^2 - (e-f)^2] = \tfrac{1}{2}s(r+g-m)^2 \\ n[(\tfrac{1}{2}s - r - e)^2 - (f-g)^2] = \tfrac{1}{2}s(r+e-n)^2 \end{array}\right.$$

Setzt man dieses in die Gleichung (217.), so kommt

$$2syz = \tfrac{1}{2}s(r+e-n)^2$$
$$2szx = \tfrac{1}{2}s(r+f-k)^2$$
$$2sxy = \tfrac{1}{2}s(r+g-m)^2 \text{ oder}$$
$$4r^2yz = r^2(r+e-n)^2$$
$$4r^2zx = r^2(r+f-k)^2$$
$$4r^2xy = r^2(r+g-n)^2 \text{ oder}$$

$$219. \left\{\begin{array}{l} 2r\sqrt{(yz)} = r(r+e-n) \\ 2r\sqrt{(zx)} = r(r+f-k) \\ 2r\sqrt{(xy)} = r(r+g-m). \end{array}\right.$$

Addirt man diese Gleichungen zu der Gleichung (215.), so kommt

$$ky + mz + 2r\sqrt{(yz)} = r(\tfrac{1}{2}s - r - e + r + e - n) = r(\tfrac{1}{2}s - n)$$
$$mz + nx + 2r\sqrt{(zx)} = r(\tfrac{1}{2}s - r - f + r + f - k) = s(\tfrac{1}{2}s - k)$$
$$nx + ky + 2r\sqrt{(xy)} = r(\tfrac{1}{2}s - r - g + r + g - m) = r(\tfrac{1}{2}s - m)$$

Nun ist $\frac{1}{2}s - n = a$, $\frac{1}{2}s - k = b$, $\frac{1}{2}s - m = c$ (201.), also kommt

$$ky + mz + 2r\sqrt{(yz)} = ar$$

$$mz + kx + 2r\sqrt{(zx)} = br$$

$$nx + my + 2r\sqrt{(xy)} = cr.$$

Diese Gleichungen stimmen genau mit den Grundgleichungen (194.) überein; folglich führen die Malfattischen Resultate wirklich rückwärts auf die Grundgleichungen, mithin ist an ihrer Richtigkeit kein Zweifel. Aber wie Malfatti seine Ausdrücke direct aus den Grundgleichungen gefunden habe, blieb unbekannt.

110.

Auch eine Bemühung von Tedenat blieb in der Hauptsache ohne Erfolg. Die Nachricht davon steht in dem zweiten Bande der Annalen S. 165 ꝛc. Tedenat fand noch einige interessante Resultate, besonders Ausdrücke für die Halbmesser, die noch einfacher sind, als die Malfattischen. Es ist nämlich $DE^2 = (y+z)^2 - (y-z)^2 = 4yz$, also $DE = 2\sqrt{(yz)}$. Nun ist zufolge (219.)

$$2\sqrt{(yz)} = r + e - n, \text{ also ist}$$

$$DE = r + e - n.$$

Zieht man nun aus A durch die gleich weit davon entfernten Punkte M und N einen Kreisbogen, dessen Halbmesser also $= n$ ist, und der die Linien AZ oder e in Q schneidet, so ist $ZQ = e - n$, also, wenn man die Linie AZ verlängert, bis sie den in das Dreieck eingeschriebenen Kreis in P trifft, $PQ = r + e - n$. Das Nämliche war der Werth von DE, also ist

$$DE = PQ.$$

Aehnliche Ausdrücke giebt es für die Projectionen der Entfernungen der Mittelpunkte der drei gesuchten Kreise, dergleichen DE auf die Seite a ist, auf die andern Seiten. Dieses ist das erste, seiner Einfachheit wegen, merkwürdige Resultat des Herrn Tedenat.

Sodann ist, wenn man die Projectionen der Entfernungen der Mittelpunkte der drei Kreise auf die Seiten wie DE, $\varkappa$, μ, ν nennt,

$$220. \left\{ \begin{array}{l} \varkappa = r + e - n = 2\Upsilon(yz) \\ \mu = r + f - k = 2\Upsilon(zx) \\ \nu = r + g - m = 2\Upsilon(xy) \end{array} \right\} \text{vermöge (219.)}$$

Multiplicirt man je zwei von diesen drei Gleichungen mit einander und dividirt sie durch die dritte, so erhält man z. B. $\frac{\varkappa\nu}{\mu} = \frac{4y\Upsilon(zx)}{2\Upsilon(zx)} = 2y$, also

$$221. \quad y = \frac{\varkappa\nu}{2\mu}, \; z = \frac{\mu\varkappa}{2\nu}, \; x = \frac{\nu\mu}{2\varkappa},$$

welches die Ausdrücke der drei Halbmesser sind. Diese Ausdrücke sind in der That noch einfacher, als die Malfattischen. Der Durchmesser jedes der drei Kreise ist nämlich gleich dem Producte der Projection der Entfernungen seines Mittelpunkts von dem Mittelpunkt der andern beiden Kreise auf die Seiten des Dreiecks, welche der Kreis berührt, dividirt durch die Projection der Entfernung der Mittelpunkte der beiden andern Kreise von einander, projicirt auf die dritte Seite, z. B.

$$2\,DI = \frac{DE \,.\, I'H''}{H'R'}.$$

Die Projectionen finden sich sehr einfach aus (220. oder 219.) oder, graphisch, daraus, daß z. B. DE = PQ. Die Resultate der Auflösung sind also schön und einfach ausgedrückt, allein das Verfahren, durch welches man diese Resultate aus den Grundgleichungen ableiten könnte, wurde nicht entdeckt. Auch ist es, so viel mir bekannt, in den Annalen dabei geblieben, und das Malfattische Räthsel ist dort nicht gelöset worden.

111.

Dem Herrn Doctor Lehmus hieselbst ist zuerst, nach Malfatti, die directe Auflösung gelungen. Ich würde dieselbe, sei-

ner Erlaubniß zufolge, hier mittheilen, wenn er es nicht inzwischen selbst gethan hätte. Die Auflösung des Herrn Lehmus steht nämlich ausführlich in dem Anhange zum zweiten Bande seines Lehrbuchs der Geometrie, Berlin 1820, bei Reimer, Seite 182 ꝛc.

Ich verweise auf dieses Buch, und theile dagegen meine eigene Auflösung mit, die von jener zum Theil etwas abweicht.

112.

Die Seiten des gegebenen Dreiecks sollen a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel α, β, γ, der Halbmesser des in das Dreieck beschriebenen Kreises soll $= 1$, sein Mittelpunkt z, die Halbmesser der drei gesuchten Kreise sollen x, y, z, ihre Mittelpunkte H, I und R seyn.

Da die Linien AZ, BZ, CZ die Winkel α, β und γ halbiren, so ist

$BD = y\cot.\tfrac{1}{2}\beta$, $CE = z\cot.\tfrac{1}{2}\gamma$, also z. B., weil, wie oben, $DE = \sqrt{((y+z)^2 - (y-z)^2)} = 2\sqrt{(yz)}$.

$$222.\quad \begin{cases} y\cot.\tfrac{1}{2}\beta + z\cot.\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sqrt{(yz)} = a = \cot.\tfrac{1}{2}\beta \\ \qquad + \cot.\tfrac{1}{2}\gamma, \text{ folglich} \\ z\cot.\tfrac{1}{2}\gamma + x\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sqrt{(zx)} = b = \cot.\tfrac{1}{2}\gamma \\ \qquad + \cot.\tfrac{1}{2}\alpha \\ x\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + y\cot.\tfrac{1}{2}\beta + 2\sqrt{(xy)} = c = \cot.\tfrac{1}{2}\alpha \\ \qquad + \cot.\tfrac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind hier die Grundgleichungen. Die zweite durch die dritte dividirt, giebt

$$\frac{x\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + z\cot.\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sqrt{(xz)}}{x\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + y\cot.\tfrac{1}{2}\beta + 2\sqrt{(xy)}} = \frac{b}{c} = \frac{\sin.\beta}{\sin.\gamma} = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\beta}{\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\cos.\tfrac{1}{2}\gamma}$$

weil sich die Sinus der Winkel des Dreiecks wie die gegenüberstehenden Seiten verhalten, und $\sin.\beta = 2\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\beta$, $\sin.\gamma = 2\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\cos.\tfrac{1}{2}\gamma$ ist. Also ist

$$223. \begin{cases} x \cot.\tfrac{1}{2}\alpha \sin.\tfrac{1}{2}\gamma \cos.\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sin.\tfrac{1}{2}\gamma \cos.\tfrac{1}{2}\gamma \sqrt{(zx)} \\ \quad + z\cos.\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \\ x\cot.\tfrac{1}{2}\alpha \sin.\tfrac{1}{2}\beta \cos.\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin.\tfrac{1}{2}\beta \cos.\tfrac{1}{2}\beta \sqrt{(xy)} \\ \quad + y\cos.\tfrac{1}{2}\beta^2 \end{cases}$$

Nun ist $\alpha = 2\rho - (\beta + \gamma)$, also $\tfrac{1}{2}\alpha = \rho - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$, also $\cot.\tfrac{1}{2}\alpha = \cot.(\rho - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) =$

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)} = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma + \cos.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma}{\cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \sin.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma}, \text{ also ist}$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}\alpha(\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\beta)$$

$$= \frac{(\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma + \cos.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma)(\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\beta)}{\cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \sin.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma}$$

Der Zähler rechter Hand ist

$$\sin.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\cos.\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2\cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$+ \sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \cos.\tfrac{1}{2}\beta^2\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\sin.\tfrac{1}{2}\beta$$

$$= \sin.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma(1 - \sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2) - \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2\cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$+ \sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \sin.\tfrac{1}{2}\gamma\sin.\tfrac{1}{2}\beta(1 - \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2)$$

$$= \sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2(\cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \sin.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma)$$
$$+ \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2(\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\sin.\tfrac{1}{2}\beta - \cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma)$$

$$= (\cos.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \sin.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma)(\sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2),$$

also ist

$$224. \quad \cot.\tfrac{1}{2}\alpha(\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\cos.\tfrac{1}{2}\gamma - \sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\beta) = \sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2$$

Setzt man dieses in die Gleichung (223.), so kommt

$$225. \begin{cases} x\sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\cos.\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{(xz)} + z\cos.\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \\ x\sin.\tfrac{1}{2}\beta^2 + 2\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{(yx)} + y\cos.\tfrac{1}{2}\beta^2 \end{cases}$$

Diese Gleichung enthält auf jeder Seite ein vollständiges Quadrat, also ist die Quadratwurzel daraus

$$226.\quad\begin{cases}\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{x}+\cos.\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{z}=\sin.\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{x}+\cos.\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{y}\\ \quad\text{also auch}\\ \sin.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{y}+\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{x}=\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{y}+\cos.\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{z}\\ \sin.\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{z}+\cos.\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{y}=\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{z}+\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{x}\end{cases}$$

Die zweite dieser drei Gleichungen von der ersten abgezogen, giebt

$$\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{x}-\sin.\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{y}=\sin.\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{x}$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{y}-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{y}-\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{x},$$

also ist

$$227.\quad(\sin.\tfrac{1}{2}\gamma-\sin.\tfrac{1}{2}\beta+\cos.\tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{x}$$
$$=(\cos.\tfrac{1}{2}\beta-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha+\sin.\tfrac{1}{2}\gamma)\sqrt{y}$$

Nun ist $\sin.\tfrac{1}{2}\gamma=\sin.(\rho-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta))=\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$ $=\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\cos.\tfrac{1}{2}\beta-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\sin.\tfrac{1}{2}\beta$, also ist die Gleichung (227.) auch

$$228.\quad\begin{cases}[\cos.\tfrac{1}{2}\alpha(\cos.\tfrac{1}{2}\beta+1)-\sin.\tfrac{1}{2}\beta(\sin.\tfrac{1}{2}\alpha+1)]\sqrt{x}=\\ [\cos.\tfrac{1}{2}\beta(\cos.\tfrac{1}{2}\alpha+1)-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha(\sin.\tfrac{1}{2}\beta+1)]\sqrt{y}\end{cases}$$

Ferner ist

$$\cos.\tfrac{1}{2}\beta+1=2\cos.\tfrac{1}{4}\beta^2$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}\alpha+1=2\cos.\tfrac{1}{4}\alpha^2$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}\alpha=\cos.\tfrac{1}{4}\alpha^2-\sin.\tfrac{1}{4}\alpha^2,\quad\cos.\tfrac{1}{2}\beta=\cos.\tfrac{1}{4}\beta^2-\sin.\tfrac{1}{4}\beta^2$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha=2\sin.\tfrac{1}{4}\sim\cos.\tfrac{1}{4}\alpha,\quad\sin.\tfrac{1}{2}\beta=2\sin.\tfrac{1}{4}\beta\cos.\tfrac{1}{4}\beta,$$

also wird aus (228.)

$$229.\quad\begin{cases}[2\cos.\tfrac{1}{4}\beta^2(\cos.\tfrac{1}{4}\alpha^2-\sin.\tfrac{1}{4}\alpha^2)-2\sin.\tfrac{1}{4}\beta\cos.\tfrac{1}{4}\beta\\ \quad(1+2\sin.\tfrac{1}{4}\alpha\cos.\tfrac{1}{4}\alpha)]\sqrt{x}=\\ [2\cos.\tfrac{1}{4}\alpha^2(\cos.\tfrac{1}{4}\beta^2-\sin.\tfrac{1}{4}\beta^2)-2\sin.\tfrac{1}{4}\alpha\cos.\tfrac{1}{4}\alpha\\ \quad(1+2\sin.\tfrac{1}{4}\beta\cos.\tfrac{1}{4}\beta)]\sqrt{y}\end{cases}$$

Dividirt man diese Gleichung durch $2\cos.\tfrac{1}{4}\alpha^2\cos.\tfrac{1}{4}\beta^2$, so kommt

$$230.\quad\begin{cases}[1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha^2-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta(\sec.\tfrac{1}{4}\alpha^2+2\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha)]\sqrt{x}=\\ [1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta^2-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha(\sec.\tfrac{1}{4}\beta^2+2\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta)]\sqrt{y}\end{cases}$$

oder weil

$$\sec.\tfrac{1}{4}\alpha^2+2\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha=1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha^2+2\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha=(1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha)^2;$$

$$\sec.\tfrac{1}{4}\beta^2+2\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta=(1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta)^2$$ ist,

$$231.\ \begin{cases}[1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha^2-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta(1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}a)^2]\sqrt{x}=\\ [1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta^2-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha(1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta)^2]\sqrt{y}\end{cases}$$

Man setze der Kürze wegen

$$\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha=p,\ \text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta=q,\ \text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma=t$$

so ist (231.)

$$(1-p^2-q(1+p)^2)\sqrt{x}=(1-q^2-p(1+q)^2)\sqrt{y}$$ oder

$$(1+p)(1-p-q(1+p))\sqrt{x}=(1+q)(1-q-p(1+q))\sqrt{y}$$

oder

$$(1+p)(1-p-q-pq)\sqrt{x}=(1+q)(1-q-p-pq)\sqrt{y},$$

also

$$(1+p)\sqrt{x}=(1+q)\sqrt{y},$$ also

$$232.\ \begin{cases}(1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha)\sqrt{x}=(1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta)\sqrt{y}, \text{ folglich auch}\\ (1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta)\sqrt{y}=(1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma)\sqrt{z}\\ (1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma)\sqrt{z}=(1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha)\sqrt{x}.\end{cases}$$

Dieses giebt

$$233.\ \begin{cases}\sqrt{y}=\dfrac{1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha}{1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta}\sqrt{x}=\dfrac{1+p}{1+q}\sqrt{x}\\[2ex] \sqrt{z}=\dfrac{1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha}{1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma}\sqrt{x}=\dfrac{1+p}{1+t}\sqrt{x}\end{cases}$$

Nun ist, wenn man von der Summe der zweiten und dritten Grundgleichung (222.) die erste abzieht

$$234.\ \cot.\tfrac{1}{2}\alpha=x\cot.\tfrac{1}{2}\alpha+\sqrt{(xz)}+\sqrt{(xy)}-\sqrt{(yz)}.$$

Setzt man hierin (233.), so kommt

$$235.\ \cot.\tfrac{1}{2}\alpha=x\left(\cot.\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{1+p}{1+t}+\frac{1+p}{1+q}-\frac{(1+p)^2}{(1+q)(1+t)}\right)$$

Es ist aber $\cot.\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\text{tang}.\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha^2}{2\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha} = \frac{1-p^2}{2p}$, also ist

$$\frac{1-p^2}{2p} = x\left(\frac{1-p^2}{2p} + \frac{1+p}{1+q} + \frac{1+p}{1+t} - \frac{(1+p)^2}{(1+q)(1+t)}\right) \text{ oder}$$

$$\frac{1-p}{2p} = x\left(\frac{1-p}{2p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+t} - \frac{1+p}{(1+q)(1+t)}\right) \text{ oder}$$

236. $(1-p)(1+q)(1+t) = x[(1-p)(1+q)(1+t) + 2p(1+t) + 2p(1+q) - 2p(1+p)]$

Der Coefficient zu x ist

$$(1+q)(1+t) - p((1+q)(1+t) - 2 - 2t - 2 - 2q + 2 + 2p) =$$

$$1+q+t+qt - p(1+q+t+qt-2-2t-2q+2p) =$$

$$1+q+t+qt+p(1+q+t-qt)-2p^2.$$

Es ist aber $\alpha = 2\rho - (\beta+\gamma)$, also $\tfrac{1}{4}\alpha = \tfrac{1}{2}\rho - \tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)$,

also $\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha = \frac{\text{tang}.\tfrac{1}{2}\rho - \text{tang}.\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)}{1+\text{tang}.\tfrac{1}{2}\rho\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)}$, und weil $\text{tang}.\tfrac{1}{2}\rho = 1$,

$$\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha = \frac{1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)}{1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)} = \frac{1 - \dfrac{\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta + \text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma}{1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta + \text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma}}{1 + \dfrac{\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta + \text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma}{1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta + \text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma}}, \text{ oder}$$

$$\text{tang}.\tfrac{1}{4}\alpha = \frac{1-\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta - \text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma - \text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma}{1+\text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta + \text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma - \text{tang}.\tfrac{1}{4}\beta\,\text{tang}.\tfrac{1}{4}\gamma}, \text{ also}$$

$$p = \frac{1-q-t-qt}{1+q+t-qt}, \text{ und oben}$$

237. $p(1+q+t-qt) = 1-q-t-qt$, folglich der Coefficient zu x

$$= 1+q+t+qt+(1-q-t-qt) - 2p^2 = 2(1-p^2),$$

mithin in (236.)

$$(1-p)(1+q)(1+t) = 2x(1-p^2), \text{ also}$$

$$x = \frac{(1+q)(1+t)}{2(1+p)}. \text{ Folglich ist}$$

$$238. \begin{cases} x = \dfrac{(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\beta)(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\gamma)}{2(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\alpha)} \\ y = \dfrac{(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\gamma)(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\alpha)}{2(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\beta)} \\ z = \dfrac{(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\alpha)(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\beta)}{2(1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\gamma)} \end{cases}$$

113.

In dieser Gestalt bieten sich die verlangten Ausdrücke für den Halbmesser der gesuchten drei Kreise zuerst dar. Sie sind aber mancherlei Verwandlungen fähig.

Es ist nämlich erstlich

$$\text{tang.}\tfrac{1}{4}\alpha = \frac{\sin.\tfrac{1}{4}\alpha}{\cos.\tfrac{1}{4}\alpha} = \frac{2\sin.\tfrac{1}{4}\alpha^2}{2\sin.\tfrac{1}{4}\alpha\cos.\tfrac{1}{4}\alpha} = \frac{1-\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}, \text{ oder}$$

$$239. \begin{cases} \text{tang.}\tfrac{1}{4}\alpha = \text{cosec.}\tfrac{1}{2}\alpha - \cot.\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ also auch} \\ \text{tang.}\tfrac{1}{4}\beta = \text{cosec.}\tfrac{1}{2}\beta - \cot.\tfrac{1}{2}\beta \\ \text{tang.}\tfrac{1}{4}\gamma = \text{cosec.}\tfrac{1}{2}\gamma - \cot.\tfrac{1}{2}\gamma, \end{cases}$$

also ist in (238.)

$$240. \begin{cases} x = \dfrac{(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\beta-\cot.\tfrac{1}{2}\beta)(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\gamma-\cot.\tfrac{1}{2}\gamma)}{2(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\alpha-\cot.\tfrac{1}{2}\alpha)} \\ y = \dfrac{(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\gamma-\cot.\tfrac{1}{2}\gamma)(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\alpha-\cot.\tfrac{1}{2}\alpha)}{2(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\beta-\cot.\tfrac{1}{2}\beta)} \\ z = \dfrac{(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\alpha-\cot.\tfrac{1}{2}\alpha)(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\beta-\cot.\tfrac{1}{2}\beta)}{2(1+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\gamma-\cot.\tfrac{1}{2}\gamma)} \end{cases}$$

Zweitens ist $\text{tang.}\tfrac{1}{4}\alpha = \dfrac{\sin.\tfrac{1}{4}\alpha}{\cos.\tfrac{1}{4}\alpha}$, also

$$1 + \text{tang.}\tfrac{1}{4}\alpha = \frac{\sin.\tfrac{1}{4}\alpha + \cos.\tfrac{1}{4}\alpha}{\cos.\tfrac{1}{4}\alpha}. \text{ Aber}$$

$$\cos.(\tfrac{1}{2}\rho - \tfrac{1}{4}\alpha) = \cos\tfrac{1}{2}\rho\cos.\tfrac{1}{4}\alpha + \sin.\tfrac{1}{2}\rho\sin.\tfrac{1}{4}\alpha, \text{ oder}$$

$$\cos.(\tfrac{1}{2}\rho - \tfrac{1}{4}\alpha) = (\cos.\tfrac{1}{4}\alpha + \sin.\tfrac{1}{4}\alpha)\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ also}$$

$$1+\tan g.\tfrac{1}{4}\alpha=\frac{\cos.(\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{4}\alpha)}{\cos.\tfrac{1}{4}\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}}.$$ Aber

$\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{4}\alpha=\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{4}(2\rho-\beta-\gamma)=\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)$, also

$$1+\tan g.\tfrac{1}{4}\alpha=\frac{\cos.\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)}{\cos.\tfrac{1}{4}\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$ und

$$1+\tan g.\tfrac{1}{4}\beta=\frac{\cos.\tfrac{1}{4}(\gamma+\alpha)}{\cos.\tfrac{1}{4}\beta\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

$$1+\tan g.\tfrac{1}{4}\gamma=\frac{\cos.\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)}{\cos.\tfrac{1}{4}\gamma\sqrt{\tfrac{1}{2}}}.$$

Also ist in (238.)

$$241.\quad\begin{cases} x=\dfrac{\cos.\tfrac{1}{4}(\alpha+\gamma)\cos.\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)\cos.\tfrac{1}{4}\alpha}{\cos.\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)\cos.\tfrac{1}{4}\beta\cos.\tfrac{1}{4}\gamma}\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ y=\dfrac{\cos.\tfrac{1}{4}(\beta+\alpha)\cos.\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)\cos.\tfrac{1}{4}\beta}{\cos.\tfrac{1}{4}(\gamma+\alpha)\cos.\tfrac{1}{4}\gamma\cos.\tfrac{1}{4}\alpha}\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ z=\dfrac{\cos.\tfrac{1}{4}(\gamma+\beta)\cos.\tfrac{1}{4}(\gamma+\alpha)\cos.\tfrac{1}{4}\gamma}{\cos.\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)\cos.\tfrac{1}{4}\alpha\cos.\tfrac{1}{4}\beta}\sqrt{\tfrac{1}{2}}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke der Halbmesser sind für Logarithmen bequem.

Drittens war oben (237.)

$1-q-t-qt=p(1+q+t-qt)$, also ist

$1+q+t+qt=2-(1-q-t-qt)=2-p(1+q+t-qt)$

oder $1+q+t+qt=2+p(1+q+t+qt)-2p(1+q+t)$,

also $(1+q+t+qt)(1-p)=2(1-p(1+q+t))$, oder

$$\frac{1+q+t+qt}{2(1+p)}=\frac{1-p(1+q+t)}{1-p^2}=\frac{(1+q)(1+t)}{2(1+p)}$$

Nun war $\dfrac{(1+q)(1+t)}{2(1+p)}=x$ (238.), also ist

$$242.\quad x=\frac{1-p(1+q+t)}{1-p^2}.$$

Es ist

$$\frac{1-p(1+q+t)}{1-p^2}=\frac{1-p^2-p(1+q+t-p)}{1-p^2}$$

$$=1-\frac{p}{1-p^2}(1+q+t-p).$$

Es ist aber $\dfrac{p}{1-p^2}=\dfrac{\text{tang.}\,\frac{1}{4}\alpha}{1-\text{tang.}\,\frac{1}{4}\alpha^2}=\frac{1}{2}\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha$, also ist

$$x=1+\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,(\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\alpha-\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\beta-\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\gamma-1)$$

oder da $1=\frac{1}{2}\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha\,.\,2\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha$ ist,

$$x=\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,(\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\alpha+2\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha-\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\beta-\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\gamma-1)$$

oder

$$x=\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,(2\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha+(1+\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\alpha)-(1+\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\beta)$$
$$-(1+\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\gamma)),$$

also, weil z. B. $\text{tang.}\,\frac{1}{4}\alpha=\text{cosec.}\,\frac{1}{2}\alpha-\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha$ (239.)

$$x=\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,[2\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha+1+\text{cosec.}\,\tfrac{1}{2}\alpha-\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$-(1+\text{cosec.}\,\tfrac{1}{2}\beta-\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\beta)$$
$$-(1+\text{cosec.}\,\tfrac{1}{2}\gamma-\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\gamma)]$$

oder

242.
$$\left\{\begin{aligned}
x&=\frac{1}{2\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha}(\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha+\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\beta+\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\gamma-1\\
&\qquad+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\alpha-\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\beta-\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\gamma)\\
y&=\frac{1}{2\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\beta}(\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha+\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\beta+\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\gamma-1\\
&\qquad+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\beta-\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\gamma-\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\alpha)\\
z&=\frac{1}{2\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\gamma}(\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha+\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\beta+\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\gamma-1\\
&\qquad+\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\gamma-\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\alpha-\text{cosec.}\tfrac{1}{2}\beta).
\end{aligned}\right.$$

Nun ist

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=n,\ \ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\beta=k,\ \ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\gamma=m$$

$$\text{cosec.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=e,\ \ \text{cosec.}\,\tfrac{1}{2}\beta=f,\ \ \text{cosec.}\,\tfrac{1}{2}\gamma=g,$$

also, weil $k+m+n=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}s$ ist,

$$\cot.\tfrac{1}{2}\alpha+\cot.\tfrac{1}{2}\beta+\cot.\tfrac{1}{2}\gamma=\tfrac{1}{2}s,$$

folglich

$$x=\frac{1}{2k}(\tfrac{1}{2}s-1+e-f-g)$$

$$y=\frac{1}{2m}(\tfrac{1}{2}s-1+f-g-e)$$

$$z=\frac{1}{2n}(\tfrac{1}{2}s-1+g-e-f)$$

Dieses sind genau die Malfattischen Ausdrücke (214.), denn r ist hier $=1$.

Ferner giebt (240.)

$$x=\frac{(1-f-k)(1-g-m)}{2(1+e-n)}$$

$$y=\frac{(1-g-m)(1-e-n)}{2(1+f-k)}$$

$$z=\frac{(1-e-n)(1-f-k)}{2(1+g-m)},$$

welches die Tedenatschen Ausdrücke (220. 221.) sind.

Dies wäre also die verlangte directe Entwickelung der Malfattischen und der daraus gezogenen Tedenatschen Resultate.

Sie ist etwas weitläuftig, und es kann leicht seyn, daß noch eine kürzere möglich ist.

114.

Man entschuldige, daß diese einzelne Aufgabe hier einen so bedeutenden Raum einnimmt. Allerdings ist weder der Satz an sich selbst sehr wichtig, noch ist zu der Auflösung viel mehr, als weitläuftige Rechnung nöthig. Ich habe die Auflösung, und selbst die früheren mißlungenen Bemühungen um dieselbe deshalb ausführlich mitgetheilt, weil sich an diesem merkwürdigen Bei=

spiel zeigt, wie viel auf die Wahl der Bezeichnung und auf die Methode der Auflösung ankommt, ja, daß eine nicht günstige Wahl die Auflösung selbst bis zu dem Grade erschweren kann, daß sie gar nicht gelingt. Dieses wird den Kenner der mathematischen Untersuchungen besonders interessiren.

115.

Es ist in der That doppelt merkwürdig, daß die französischen Mathematiker die Auflösung nicht fanden, weil sie so nahe daran waren. Man wird nämlich leicht bemerken, daß der Hauptkunstgriff bei der Auflösung darin liegt, die Gleichung (225.) darzustellen, die auf jeder Seite ein vollständiges Quadrat enthält, denn alles Uebrige ist fast nur mechanische Rechnung. Eine solche Gleichung aber hatten wirklich auch schon die französischen Geometer. Man sehe oben die Gleichung (205.). Uebersetzt man dieselbe in die trigonometrischen Zeichen, so kommt sie im Wesentlichen mit der Gleichung (225.) überein. Die größte Schwierigkeit hatten dieselben also wirklich schon überwunden, und dennoch gelang ihnen die Auflösung nicht.

Wahrscheinlich liegt der Grund vorzüglich darin, daß sie sich nicht, wie vom Herrn Doctor Lehmus und hier geschehen ist, der trigonometrischen Linien bedienten, die hier bequem sind.

5.

Von den beiden, in und um ein Dreieck beschriebenen, Kreisen und der Entfernung ihrer Mittelpunkte von einander.

116.

Ausdrücke für die Halbmesser des in und umschriebenen Kreises.

Fig. 30. Die trigonometrischen Linien vereinfachen häufig die Untersuchung der Figuren. So auch hier. Nichts ist leichter, als die Halbmesser der in und umschriebenen Kreise, die r und R heißen sollen, mit Hülfe der trigonometrischen Linien auszudrücken. Wenn nämlich M der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist, so ist BM=MC, der Winkel am Mittelpunkt BMC ist doppelt so groß, als der Umfangs-Winkel BAC. Ist also MP auf BC senkrecht, so ist BMP=CMP, also BMP=α. Aber BP=$\frac{1}{2}$a, also ist BM oder R=$\frac{1}{2}$a cosec. α oder

$$243. \quad R = \frac{a}{2 \sin. \alpha}.$$

Der Halbmesser des umschriebenen Kreises ist also gleich einer beliebigen Seite, dividirt durch den doppelten Sinus des gegenüberliegenden Winkels.

Man kann daraus, wenn man will, den Satz ableiten, daß sich die Seiten im Dreieck, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten; denn, da eben sowohl

$$R = \frac{b}{2 \sin. \beta} = \frac{c}{2 \sin. \gamma},$$

so ist $\frac{a}{\sin.\alpha} = \frac{b}{\sin.\beta} = \frac{c}{\sin.\gamma}$. Auch ist

$$244. \quad R = \frac{a+b+c}{2(\sin.\alpha+\sin.\beta+\sin.\gamma)} \text{ oder } R = \frac{a+b}{2(\sin.\alpha + \sin.\beta)}$$

$$= \frac{b+c}{2(\sin.\beta+\sin.\gamma} = \frac{c+a}{2(\sin.\gamma+\sin.\alpha)}.$$

Denn da

$$a+b+c = a\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right) \text{ und}$$

$$\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma = \sin.\alpha\left(1+\frac{\sin.\beta}{\sin.\alpha}+\frac{\sin.\gamma}{\sin.\alpha}\right)$$

$$= \sin.\alpha\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right),$$

so ist

$$\frac{a+b+c}{\sin.\alpha+\sin.\beta+\sin.\gamma} = \frac{a}{\sin.\alpha}. \text{ Eben so}$$

$$\frac{a+b}{\sin.\alpha+\sin.\beta} = \frac{a}{\sin.\alpha} = \frac{b+c}{\sin.\beta+\sin.\gamma} = \frac{c+a}{\sin.\gamma+\sin.\alpha}.$$

117.

Die geraden Linien durch die Scheitel des Dreiecks und durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises N halbiren des Dreiecks Winkel, also ist z. B.

$$r(\cot.\tfrac{1}{2}\beta + \cot.\tfrac{1}{2}\gamma) = a,$$

oder wenn man mit $\sin.\frac{1}{2}\beta.\sin.\frac{1}{2}\gamma$ multiplicirt,

$$r(\cos.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma + \cos.\tfrac{1}{2}\gamma\sin.\tfrac{1}{2}\beta) = a\sin.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma$$

oder $r\sin.\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = a\sin.\frac{1}{2}\beta\sin.\frac{1}{2}\gamma$,

oder, weil $\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{1}{2}(2\varrho-\alpha) = \varrho - \frac{1}{2}\alpha$ ist,

$$r\cos.\tfrac{1}{2}\alpha = a\sin.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma, \text{ also}$$

$$245. \quad r = a.\frac{\sin.\frac{1}{2}\beta\sin.\frac{1}{2}\gamma}{\cos.\frac{1}{2}\alpha},$$

welches der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises ist. Auch hieraus läßt sich schließen, daß sich die Sinus der Winkel des Dreiecks wie die gegenüberliegenden Seiten verhalten. Denn da eben sowohl z. B. $r = b \frac{\sin.\frac{1}{2}\gamma \sin.\frac{1}{2}\alpha}{\cos.\frac{1}{2}\beta}$, so ist

$$a \cos.\tfrac{1}{2}\beta \sin.\tfrac{1}{2}\beta \sin.\tfrac{1}{2}\gamma = b \cos.\tfrac{1}{2}\alpha \sin.\tfrac{1}{2}\gamma \sin.\tfrac{1}{2}\alpha \text{ oder}$$

$$a \sin.\beta = b \sin.\alpha, \text{ und so die übrigen.}$$

118.

Dividirt man $2r$ durch R, so kommt

$$\frac{2r}{R} = \frac{2 \sin.\alpha \sin.\frac{1}{2}\beta \sin.\frac{1}{2}\gamma}{\cos.\frac{1}{2}\alpha},$$

oder weil $2 \sin.\alpha = 4 \sin.\frac{1}{2}\alpha \cos.\frac{1}{2}\alpha$

$$246. \quad \frac{2r}{R} = 8 \sin.\tfrac{1}{2}\alpha \sin.\tfrac{1}{2}\beta \sin.\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Es ist aber

$$\sin.2a + \sin.2\beta + \sin.2\gamma$$
$$= 2(\sin.\alpha \cos.\alpha + \sin.\beta \cos.\beta - \sin.(\alpha+\beta) \cos.(a+\beta))$$
$$= 2(\sin.\alpha \cos.\alpha + \sin.\beta \cos.\beta - \sin.\alpha \cos.\beta^2 \cos.\alpha$$
$$+ \sin.\alpha^2 \cos.\beta \sin.\beta - \cos.\alpha^2 \sin\beta \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta^2 \sin.\alpha)$$
$$= 2[\sin.\alpha \cos.\alpha (1 - \cos.\beta^2 + \sin.\beta^2)$$
$$+ \sin.\beta \cos.\beta (1 + \sin.\alpha^2 - \cos.\alpha^2)]$$
$$= 2(\sin.\alpha \cos.\alpha . 2 \sin.\beta^2 + \sin.\beta \cos.\beta . 2 \sin.\alpha^2)$$
$$= 4 \sin.\alpha \sin.\beta (\cos.\alpha \sin.\beta + \sin.\alpha \cos.\beta)$$
$$= 4 \sin.\alpha \sin.\beta \sin.\gamma$$

und $\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma = \sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta$

$$= \sin.\alpha (1 + \cos.\beta) + \sin.\beta (1 + \cos.\alpha)$$
$$= \sin.\alpha . 2 \cos.\tfrac{1}{2}\beta^2 + \sin.\beta . 2 \cos.\tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= 4 (\sin.\tfrac{1}{2}\alpha \cos.\tfrac{1}{2}\alpha \cos.\tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$+ \sin.\tfrac{1}{2}\beta \cos.\tfrac{1}{2}\beta \cos.\tfrac{1}{2}\alpha^2)$$

$$= 4 \cos. \tfrac{1}{2} \alpha \cos. \tfrac{1}{2} \beta \, (\sin. \tfrac{1}{2} \alpha \cos. \tfrac{1}{2} \beta + \cos. \tfrac{1}{2} \alpha \sin. \tfrac{1}{2} \beta)$$

$$= 4 \cos. \tfrac{1}{2} \alpha \cos. \tfrac{1}{2} \beta \cos. \tfrac{1}{2} \gamma,$$

Also ist

$$\frac{\sin. 2\alpha + \sin. 2\beta + \sin. 2\gamma}{\sin. \alpha + \sin. \beta + \sin. \gamma} = \frac{\sin. \alpha \sin. \beta \sin. \gamma}{\cos. \frac{1}{2}\alpha \cos. \frac{1}{2}\beta \cos. \frac{1}{2}\gamma}$$

$$= 8 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \sin. \tfrac{1}{2} \beta \sin. \tfrac{1}{2} \gamma.$$

Folglich ist auch

$$247. \quad \frac{2r}{R} = \frac{\sin. 2\alpha + \sin. 2\beta + \sin. 2\gamma}{\sin. \alpha + \sin. \beta + \sin. \gamma}.$$

Es ist auch

$$\cos. \alpha + \cos. \beta + \cos. \gamma = \cos. \alpha + \cos. \beta + \sin. \alpha \sin. \beta - \cos. \alpha \cos. \beta$$

$$= \cos. \alpha (1 - \cos. \beta) + \cos. \beta + \sin. \alpha \sin. \beta$$

$$= (1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2}\alpha^2) \, 2 \sin. \tfrac{1}{2}\beta^2 + 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2}\beta^2 + \sin. \alpha \sin. \beta$$

$$= 1 + \sin. \alpha \sin. \beta - 4 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha^2 \sin. \tfrac{1}{2} \beta^2$$

$$= 1 + 4 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \sin. \tfrac{1}{2} \beta \cos. \tfrac{1}{2} \alpha \cos. \tfrac{1}{2} \beta - 4 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha^2 \sin. \tfrac{1}{2} \beta^2$$

$$= 1 + 4 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \sin. \tfrac{1}{2} \beta \, (\cos. \tfrac{1}{2} \alpha \cos. \tfrac{1}{2} \beta - \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \sin. \tfrac{1}{2} \beta)$$

$$= 1 + 4 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \sin. \tfrac{1}{2} \beta \sin. \tfrac{1}{2} \gamma.$$

Also ist

$$\cos. \alpha + \cos. \beta + \cos. \gamma - 1 = 4 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \sin. \tfrac{1}{2} \beta \sin. \tfrac{1}{2} \gamma,$$

folglich vermöge (246.)

$$248. \quad \frac{r}{R} = \cos. \alpha + \cos. \beta + \cos. \gamma - 1.$$

119.

Wenn der Flächen-Inhalt des Dreiecks $= \Delta$, so ist

$$249. \quad r = \frac{2\Delta}{a + b + c}.$$

Denn der Umfang $a+b+c$ des Dreiecks mit dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises multiplicirt, giebt den doppelten Flächen-Inhalt.

Ferner ist z. B. $2\Delta = bc \sin.\alpha$. Es war aber $R = \frac{a}{2\sin.\alpha}$ also ist

$$250. \quad R = \frac{abc}{4\Delta}.$$

Dieses giebt

$$251. \quad 2Rr = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Durch die Seiten ausgedrückt, ist bekanntlich der Inhalt $\Delta = \frac{1}{4}\surd((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a))$,

also, weil $\frac{2r}{R} = \frac{4\Delta}{a+b+c} \cdot \frac{4\Delta}{abc} = \frac{16\Delta^2}{(a+b+c)abc}$,

so ist

$$252. \quad \frac{2r}{R} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{abc}.$$

Entfernung zwischen den Mittelpunkten des in- und umschriebenen Kreises.

120.

Bekanntlich ist das Quadrat dieser Entfernungen gleich dem Quadrat des Halbmessers des umschriebenen Kreises weniger dem doppelten Produkte der Halbmesser des in- und des umschriebenen Kreises. Von diesem einfachen Satz ist der Beweis gewöhnlich nicht eben so einfach. Folgender Beweis ist ziemlich kurz.

Fig. 30. Es ist nämlich $MB = R$, $NB = r \operatorname{cosec.} \frac{1}{2}\beta$ und $MBN = MBC - NBC = \varrho - \alpha - \frac{1}{2}\beta = \varrho - \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$.

Da nun $MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2BM.BN \cos. MBN$, so erhält man für die Entfernung der Mittelpunkte, die D heißen soll,

$$D^2 = R^2 + r^2 \operatorname{cosec}. \tfrac{1}{2}\beta^2 - 2Rr \operatorname{cosec}. \tfrac{1}{2}\beta \cos. \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha)$$ oder

$$D^2 = R^2 - 2Rr. \frac{\cos. \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\sin. \frac{1}{2}\beta} + \frac{r^2}{\sin. \frac{1}{2}\beta^2}.$$

Nun ist

$$\cos. \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = \cos. \tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) + 2 \sin. \tfrac{1}{2}\gamma \sin. \tfrac{1}{2}\alpha$$
$$= \sin. \tfrac{1}{2}\beta + 2 \sin. \tfrac{1}{2}\gamma \sin. \tfrac{1}{2}\alpha,$$

also ist

$$D^2 = R^2 - 2Rr - 4Rr. \frac{\sin. \frac{1}{2}\gamma \sin. \frac{1}{2}\alpha}{\sin. \frac{1}{2}\beta} + \frac{r^2}{\sin. \frac{1}{2}\beta^2}$$ oder

$$D^2 = R^2 - 2Rr - \frac{r}{\sin. \frac{1}{2}\beta^2}(4R \sin. \tfrac{1}{2}\gamma \sin. \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta - r).$$

Es war aber $4R \sin. \frac{1}{2}\alpha \sin. \frac{1}{2}\beta \sin. \frac{1}{2}\gamma = r$ (246.), also ist

$$253. \quad D^2 = R^2 - Rr,$$

welches bewiesen werden sollte.

121.

Im dritten Bande der Annalen der Mathematik S. 346 ꝛc. hat Garnier folgenden Beweis gegeben, der dem vorigen ähnlich ist. Nachdem nämlich zuvörderst, wie oben, die Gleichung

$$D^2 = R^2 + r^2 \operatorname{cosec}. \tfrac{1}{2}\beta^2 - 2Rr \operatorname{cosec}. \tfrac{1}{2}\beta \cos. \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha)$$ oder

$$2Rr \cos. \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin. \tfrac{1}{2}\beta = r^2 + (R^2 - D^2) \sin. \tfrac{1}{2}\beta^2$$

gefunden ist, nimmt Garnier die ähnliche Gleichung aus dem Dreieck CMN, welche

$$2Rr \cos. \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \sin. \tfrac{1}{2}\gamma = r^2 + (R^2 - D^2) \sin. \tfrac{1}{2}\gamma^2$$ ist.

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt

$$2Rr[\cos. \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin. \tfrac{1}{2}\beta - \cos. \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \sin. \tfrac{1}{2}\gamma]$$
$$= (R^2 - D^2)(\sin. \tfrac{1}{2}\beta^2 - \sin. \tfrac{1}{2}\gamma^2).$$

Nun ist der Coefficient zu $2Rr$

$$= \cos. \tfrac{1}{2}\gamma \cos. \tfrac{1}{2}\alpha \sin. \tfrac{1}{2}\beta + \sin. \tfrac{1}{2}\alpha \sin. \tfrac{1}{2}\beta \sin. \tfrac{1}{2}\gamma$$
$$- \cos. \tfrac{1}{2}\alpha \cos. \tfrac{1}{2}\beta \sin. \tfrac{1}{2}\gamma - \sin. \tfrac{1}{2}\alpha \sin. \tfrac{1}{2}\beta \sin. \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$= \cos.\tfrac{1}{2}\alpha(\cos.\tfrac{1}{2}\gamma\sin.\tfrac{1}{2}\beta - \cos.\tfrac{1}{2}\beta\sin.\tfrac{1}{2}\gamma)$$
$$= \cos.\tfrac{1}{2}\alpha\sin.\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$
$$= \sin.\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\sin.\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$
$$= -\sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2\cos.\tfrac{1}{2}\beta^2 + \cos.\tfrac{1}{2}\gamma^2\sin.\tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$= -\sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2(1 - \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2) + \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2(1 - \sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2)$$
$$= \sin.\tfrac{1}{2}\beta^2 - \sin.\tfrac{1}{2}\gamma^2,$$

also ist

$$2Rr = R^2 - D^2 \text{ oder}$$
$$D^2 = R^2 - 2Rr,$$

welches der Satz ist.

Beweise des Satzes, daß der Halbmesser des umschriebenen Kreises in jedem Dreieck größer ist, als der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises.

122.

Erster Beweis. Am kürzesten kann man den Satz durch den Ausdruck für die Entfernung der Mittelpunkte beweisen. Denn da es für jedes Dreieck ohne Ausnahme einen eingeschriebenen und einen umschriebenen Kreis giebt, so kann die Entfernung der Mittelpunkte nie eine unmögliche Größe seyn, also muß

$$D^2 = R(R - 2r)$$

allemal positiv, folglich nothwendig

$$254. \quad R > 2r$$

seyn.

123.

Zweiter Beweis. Der erste Beweis setzt die Formel für die Entfernung voraus. Der Satz läßt sich aber auch ohne

sie beweisen. Es ist dann ein allgemeiner algebraischer Satz nöthig, der auch für sich selbst interessant ist. Dieser Satz besteht darin, daß allemal

255. $abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$

für drei beliebige positive Zahlen a, b und c ist. Dieses läßt sich folgendergestalt beweisen. Es sey

a die kleinste der drei Größen,
$b = a + m$ die zunächst größere,
$c = b + n = a + m + n$ die größte,

so daß also m und n immer positiv sind. Nun ist

$$abc = a(a+m)(a+m+n) \text{ oder}$$
$$abc = a^3 + a^2m + a^2n + a^2m + am^2 + amn \text{ oder}$$
$$abc = a^3 + 2a^2m + am^2 + a^2n + amn \text{ und}$$
$$a+b-c = 2a+m-a-m-n = a-n$$
$$a+c-b = 2a+m+n-a-m = a+n$$
$$b+c-a = 2a+2m+n-a = a+2m+n, \text{ also}$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = (a-n)(a+n)(a+n+2m)$$
$$= (a^2-n^2)(a+n+2m)$$
$$= a^3+a^2n+2a^2m-n^2a-n^3-2mn^2$$

Also ist

$$abc-(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = a^3+2a^2m+am^2+a^2n+amn$$
$$-a^3-2a^2m+n^2a-a^2n+2mn^2+n^3$$
$$= a(m^2+mn+n^2)+n^2(n+2m)$$

Nun sind m und n immer positiv. Folglich ist $abc-(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ immer positiv, und folglich immer

$$abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

so lange a, das heißt, so lange alle drei Größen positiv sind, denn a ist die kleinste von ihnen.

Ich habe diesen Satz sonst nirgend gefunden. Er gilt nicht blos für den hiesigen Fall, wo die drei Größen a, b, c, die drei Seiten eines Dreiecks, und also zwei von ihnen zusammen

immer größer sind, als die dritte, sondern ohne Bedingung für alle beliebige positive Werthe von a, b und c.

Aus diesem Satze folgt nunmehr unmittelbar derjenige von den Halbmessern der beiden Kreise. Denn da $\frac{r}{R} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{abc}$ war (252.), so folgt, daß

$$\frac{2r}{R} < 1,$$

und folglich immer

$$R > 2r \text{ ist.}$$

124.

Aus den Ausdrücken für $\frac{2r}{R}$ (246. 247. und 248.) kann man auch schließen, daß in jedem Dreieck

256. $8 \sin.\frac{1}{2}\alpha \sin.\frac{1}{2}\beta \sin.\frac{1}{2}\gamma < 1$

257. $\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma > \sin.2\alpha + \sin.2\beta + \sin.2\gamma$

258. $\cos.\alpha + \cos.\beta + \cos.\gamma < \frac{3}{2}$

ist, welche Sätze wieder bei andern Gelegenheiten nützlich seyn können.

6.

Ueber die vier Kreise, welche die Seiten eines geradlinigen Dreiecks innerhalb und die verlängerten Seiten außerhalb berühren.

125.

Die Quadrat-Wurzel aus dem Produkt der Halbmesser dieser vier Kreise ist gleich dem Inhalt des Dreiecks.

Dieser an sich bekannte Satz läßt sich auf folgende eigenthümliche Art herleiten, die auch bei andern Gelegenheiten nützlich seyn kann.

Wenn nämlich die drei Seiten eines Dreiecks (Fig. 31.) $ABC = a, b, c$ sind, und der Inhalt des Dreiecks Δ heißt, so ist der Halbmesser des Kreises r, der die Seiten des Dreiecks von innen berührt, $r = \frac{2\Delta}{a + b + c}$, denn dieser Halbmesser, multiplicirt mit dem Umfange des Dreiecks, giebt den doppelten Inhalt. Nun lasse man die Seite c abnehmen, während sie ihre Richtung behält, z. B. bis auf AD, so wird der eingeschriebene Kreis kleiner werden, und folglich sein Mittelpunkt der Seite AD näher rücken. Er wird in sie fallen für $c = 0$. Geht man mit c über o hinaus, jedoch so, daß man dieser Seite wiederum die nämliche Richtung gegen AC giebt, das heißt, den Winkel CAB' gleich dem Winkel CAB macht, um zuletzt wieder auf ein Dreieck $AB'C$ zu kommen, welches dem gegebenen ABC gleich und ähnlich ist, so ist c negativ, denn das Negative ist das, was aus dem Positiven wird, nach dem Durchgange durch o. Für die negative c aber muß, aus dem-

selben Grunde, der Mittelpunkt des berührenden Kreises auf der entgegengesetzten Seite von c, das heißt, außerhalb des Dreiecks ACB' fallen, weil er von innerhalb bis in die Seite selbst gekommen ist, und über dieselbe hinaus schreitet, indem c über o hinaus, nicht in das Positive zurück, sondern weiter in das Negative ging. Folglich bedeutet der Ausdruck $\frac{2\Delta}{a+b+c}$, wenn man darin Δ und c negativ annimmt, das heißt, ihn auf das negative Dreieck $AB'C$ anwendet, den Halbmesser des Kreises, der von dem Dreieck CAB' die Seite c außerhalb, und folglich von den andern beiden Seiten die Verlängerung berührt. Dieser Halbmesser ist also, und zwar in dem Sinne, wie der des Dreiecks ABC, das heißt, nach innerhalb gerechnet, $= \frac{-2\Delta}{a+b-c}$. Will man nach außerhalb rechnen, wie es natürlich ist, weil der Mittelpunkt außerhalb liegt, so ist derselbe $= \frac{2\Delta}{a+b-c}$. Er soll r' heißen.

Also sind auch die Halbmesser der Kreise, welche die Seiten b und a außerhalb, je die andern beiden aber in der Verlängerung berühren, und die r'' und r''' heißen sollen,

$$r'' = \frac{2\Delta}{a-b+c} \text{ und } r''' = \frac{2\Delta}{b+c-a}.$$

Das Produkt dieser vier Halbmesser ist

$$rr'r''r''' = \frac{16\Delta^4}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$$

der Inhalt des Dreiecks aber ist bekanntlich

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-+c)(b+c-a))},$$

woraus folgt $16\Delta^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$. Also ist $rr'r''r''' = \Delta^2$, und folglich

$$259. \quad \Delta = \sqrt{(rr'r''r''')},$$

welches der Satz ist.

126.

Auch für die Pyramide kann man den Ausdruck für die Halbmesser der Kugeln, welche je eine Fläche außerhalb, und die andern drei Flächen in der Verlängerung berühren, unmittelbar aus derjenigen für die eingeschriebene Kugel ableiten, wenn man die Flächen, die außerhalb berührt werden sollen, negativ setzt. Wenn nämlich der Inhalt der Pyramide P ist, und die vier Seiten-Ebenen A, B, C, D heißen, so ist der Halbmesser der eingeschriebenen Kugel $= \frac{3P}{A+B+C+D}$, denn die Summe der äußern Fläche, multiplicirt mit dem Halbmesser der eingeschriebenen Kugel, giebt den dreifachen Inhalt. Die Halbmesser der Kugeln hingegen, welche die Flächen A, B, C oder D außerhalb, und je die drei andern in der Verlängerung berühren, sind

$$260. \quad \frac{3P}{B+C+D-A}, \quad \frac{3P}{A-B+C+D}, \quad \frac{3P}{A+B-C+D}$$

$$\text{und} \quad \frac{3P}{A+B+C-D}.$$

Diesen Umstand bei der Pyramide berührt Langrange im 30ten. §. seiner Abhandlung über die Pyramide (Mémoires de l'academie de Berlin 1773) und nach ihm Carnot in der corrélation de cinq points dans l'espace §. 16., aber ohne die obige Erläuterung.

Es giebt noch mehrere interessante Sätze von den obigen vier Kreisen im Dreieck.

127.

Verbindet man z. B. die Mittelpunkte der äußern Kreise mit den Ecken des gegebenen Dreiecks durch gerade Linien, wie (Fig. 32.) RB, RC, so liegen je zwei dieser Linien, die in einer Ecke zusammenstoßen, wie RC und R'C in einer geraden Linie; denn RC halbirt den Winkel BCE', rC halbirt den Winkel BCA, BCE' und BCA aber machen zusammen zwei rechte aus; also ist rcR ein rechter Winkel; eben so Rcr, folglich ist RCR' eine gerade Linie, und so die andern. Mit=

hin liegen die Mittelpunkte R, R′, R″ in den Scheiteln eines Dreiecks, in dessen Seiten sich die Scheitel A, B, C, des gegebenen Dreiecks befinden.

128.

Die Winkel der äußern Dreiecke, wie BCR, haben die Werthe, welche in der Figur eingeschrieben sind, wie ohne besondere Erläuterung zu sehen ist. Alle diese Dreiecke sind einander ähnlich, denn sie sind gleichwinklig, aber sie sind nicht dem gegebenen Dreieck ABC ähnlich.

129.

Das Viereck BrCR hat zwei rechte Winkel bei B und C, und liegt also nicht allein in einem Kreise, sondern Rr ist auch ein Durchmesser des Kreises um das Viereck, der zugleich auch der Kreis um das Dreieck BRC ist. Der Durchmesser dieses letztern ist $= \frac{a}{\sin. BRC}$ (244.) $= \frac{a}{\cos. \frac{1}{2} A}$, weil $BRC = \rho - \frac{1}{2} A$. Nun ist $rC = Rr \sin. rRC$ und zugleich $rC = r \operatorname{cosec.} \frac{1}{2} C = \frac{r}{\sin. \frac{1}{2} C}$, also ist $\frac{r}{\sin. \frac{1}{2} C} = Rr \sin. rRC$ $= \frac{a}{\cos. \frac{1}{2} A} . \sin. rRC$. Aber $r = a \frac{\sin. \frac{1}{2} B \sin. \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2} A}$ (245.), also ist $\frac{a \sin. \frac{1}{2} B}{\cos. \frac{1}{2} A} = \frac{a}{\cos. \frac{1}{2} A} . \sin. rRc$, folglich $\sin. rRc = \sin. \frac{1}{2} B$, und folglich $rRC = \frac{1}{2} B$. Eben so ist $rRB = \frac{1}{2} C$, und so die andern Winkel, wie es in der Figur bemerkt ist.

130.

Die Entfernungen der Ecken des Dreiecks RR′R″ von dem Mittelpunkt r des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises sind z. B.

$$Rr = \frac{a}{\cos. \frac{1}{2} A} = a \sec. \frac{1}{2} A, \text{ also}$$

$$261. \quad = a \sec. \tfrac{1}{2} A, \; b \sec. \tfrac{1}{2} B, \; c \sec. \tfrac{1}{2} C.$$

131.

Da $BRr = \frac{1}{2}C$ ist, so ist $BrR = \rho - \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Aber $BrA = 2\rho - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$. Also ist $BrA + BrR = 2\rho$, und folglich ist ArR eine gerade Linie. Folglich liegen die Ecken der Dreiecke ABC und $RR'R''$ in geraden Linien mit dem Mittelpunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises.

132.

Da rAR'' ein rechter Winkel ist, so ist RA auf $R'R''$ senkrecht. Folglich schneiden sich die Perpendikel RA, $R'B$ und $R''C$ aus den Scheiteln des Dreiecks $RR'R''$ auf seine gegenüberliegenden Seiten in dem Mittelpunkt r des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises.

133.

Wenn RE auf BC perpendiculär ist, so ist RE der Halbmesser r' des äußern Kreises an a und

$$r'(\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}B + \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}C) = a = r'\left(\frac{\sin.\frac{1}{2}B}{\cos.\frac{1}{2}B} + \frac{\sin.\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}C}\right)$$

$$= r'\frac{\sin.\frac{1}{2}(B+C)}{\cos.\frac{1}{2}B\cos.\frac{1}{2}C} = \frac{r'\cos.\frac{1}{2}A}{\cos.\frac{1}{2}B\cos.\frac{1}{2}C},$$

also sind die Halbmesser der drei äußern Kreise

$$262.\quad r' = a\frac{\cos.\frac{1}{2}B\cos.\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}A},\quad r'' = b\frac{\cos.\frac{1}{2}C\cos.\frac{1}{2}A}{\cos.\frac{1}{2}B},$$

$$r''' = c\frac{\cos.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}B}{\cos.\frac{1}{2}C}.$$

Der Halbmesser des innern Kreises ist

$$r = a\frac{\sin.\frac{1}{2}B\sin.\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}A} = b\frac{\sin.\frac{1}{2}C\sin.\frac{1}{2}A}{\cos.\frac{1}{2}B} = c\frac{\sin.\frac{1}{2}A\sin.\frac{1}{2}B}{\cos.\frac{1}{2}C}\quad (245.),$$

daraus folgt

$$r' - r = a\frac{\cos.\frac{1}{2}(B+C)}{\cos.\frac{1}{2}A} = a\frac{\sin.\frac{1}{2}A}{\cos.2A} = a\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}A$$

also

$$263. \begin{cases} r' - r = a \text{ tang. } \tfrac{1}{2} A \\ r'' - r = b \text{ tang. } \tfrac{1}{2} B \\ r''' - r = c \text{ tang. } \tfrac{1}{2} C \end{cases}$$

Da der Inhalt des Dreiecks $ABC = \sqrt{(r r' r'' r''')}$ ist, so ist $\Delta = a \sqrt{(b c \cos. \tfrac{1}{2} B \cos. \tfrac{1}{2} B \sin. \tfrac{1}{2} B \sin. \tfrac{1}{2} C)}$ oder

$\Delta = \tfrac{1}{2} a \sqrt{(b c \sin. B \sin. C)} = \tfrac{1}{2} a b \sin. c$, wie gehörig.

134.

Der Inhalt der Dreiecke ACR', BCR und ABR'' ist

$$264. \quad \frac{a\Delta}{b+c-a}, \quad \frac{b\Delta}{c+a-b}, \quad \frac{c\Delta}{a+b-c},$$

denn z. B. der Halbmesser des äußern Kreises von a ist $\frac{2\Delta}{b+c-a}$. Dieser ist das Perpendikel RE des Dreiecks BCR. Die Grundlinie ist a, also ist der Inhalt $\frac{a\Delta}{b+c-a}$ und so die andern.

135.

Der Inhalt des ganzen Dreiecks $R R' R''$ ist also

$$\Delta' = \Delta\left(\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} + 1\right).$$

Die Größen $b+c-a$, $c+a-b$ und $a+b-c$ sind die doppelten Entfernungen der Punkte, in welchen der innere Kreis die Seiten berührt, von den Ecken; denn es ist z. B. $c-(b-(a-Bk)) = Bk$, also $c-b+a = 2Bk$, also wenn diese Entfernungen in den Seiten a, b, c, k, m, n heißen, so ist

$$2k = c-b+a, \quad 2m = a-c+b, \quad 2n = b-a+c,$$

und folglich $\Delta' = \Delta\left(\frac{a}{2n} + \frac{b}{2k} + \frac{c}{2m} + 1\right)$ oder

$$\Delta' = \frac{\Delta}{8\,kmn}\,(4akm + 4bmn + 4cnk + 8kmn) \text{ oder}$$

$$\Delta' = \frac{\Delta}{2\,kmn}\,(akm + bmn + cnk + 2kmn).$$

Der zweite Factor rechter Hand ist

$$km(a + 2n) + n(bm + ck)$$
$$= km(b + c) + n(bm + ck)$$
$$= \tfrac{1}{4}(c - b + a)(a - (c - b)) + \tfrac{1}{4}(b - a + c)(ba - bc + b^2 + c^2 - bc + ac)$$
$$= \tfrac{1}{4}(a^2 - (c - b)^2) + \tfrac{1}{4}(b + c)(c - b)^2 + \tfrac{1}{4}(b+c)^2 a - \tfrac{1}{4}a(c-b)^2 - \tfrac{1}{4}a^2(b+c)$$
$$= \tfrac{1}{4}a(b + c)^2 - \tfrac{1}{4}a(c - b)^2$$
$$= abc.$$

Also ist

$$\Delta' = \frac{\Delta\,abc}{2\,kmn}$$

Es ist aber $\Delta = \sqrt{\left(\left(\frac{a+b+c}{2}\right)kmn\right)}$, also

$$kmn = \frac{2\,\Delta^2}{a + b + c},\ \text{folglich}\ \Delta' = \frac{abc(a + b + c}{4\,\Delta}.$$

Der Halbmesser des um ABC beschriebenen Kreises ist

$$R = \frac{abc}{4\,\Delta}\ (250.).\ \text{Also ist}$$

$$265.\quad \Delta' = R(a + b + c),$$

das heißt, der Inhalt des Dreiecks $RR'R''$ ist gleich dem Umfange des Dreiecks ABC, multiplicirt mit dem Halbmesser des um eben dieses Dreieck beschriebenen Kreises.

136.

Die Inhalte der Dreiecke ABC und $RR'R''$ verhalten sich also wie $\tfrac{1}{2}r$ zu R oder wie r zu $2R$, das heißt, wie der Halb=

messer des in ABC beschriebenen Kreises zum Durchmesser des Kreises um dasselbe. Und da der Halbmesser des umschriebenen Kreises immer mehr als doppelt so groß ist, wie der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, so ist das Dreieck $RR'R''$ immer mehr als viermal so groß, wie das Dreieck ABC.

137.

Da $\Delta = \frac{1}{2} r(a+b+c) = \frac{abc}{4r}$, so ist $R(a+b+c) = \frac{abc}{2r}$, folglich in (265.) auch

$$266. \quad \Delta' = \frac{abc}{2r},$$

das heißt: der Inhalt des Dreiecks $RR'R''$ ist auch gleich dem Produkt der Seiten des Dreiecks ABC, dividirt durch den Durchmesser des in dasselbe beschriebenen Kreises.

138.

In dem Dreieck RBC ist, weil sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten.

$$\frac{a}{\cos.\frac{1}{2}A} = \frac{BR}{\cos.\frac{1}{2}C}, \text{ also } BR = a\frac{\cos.\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}A}$$

und in dem Dreieck RBA, $\frac{c}{\cos.\frac{1}{2}C} = \frac{R''B}{\cos.\frac{1}{2}A}$, also

$$R''B = c\frac{\cos.\frac{1}{2}A}{\cos.\frac{1}{2}C} = a\frac{\sin.C}{\sin.A}\cdot\frac{\cos.\frac{1}{2}A}{\cos.\frac{1}{2}C} = a\frac{\sin.\frac{1}{2}C}{\sin.\frac{1}{2}A},$$

also ist

$$RB + R''B \text{ oder } RR'' = a\left(\frac{\cos.\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}A} + \frac{\sin.\frac{1}{2}C}{\sin.\frac{1}{2}A}\right)$$

$$= a\frac{\sin.\frac{1}{2}(A+C)}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A} = 2a\frac{\cos.\frac{1}{2}B}{\sin.A} = 2b\frac{\sin.\frac{1}{2}B}{\sin.B} = \frac{b}{\sin.\frac{1}{2}B}$$

also sind die Seiten des Dreiecks $RR'R''$

$$267. \quad R'R'' = \frac{a}{\sin.\frac{1}{2}A}, \quad R''R = \frac{b}{\sin.\frac{1}{2}B}, \quad RR' = \frac{c}{\sin.\frac{1}{2}C}$$

daraus folgt auch der Inhalt des Dreiecks $RR'R''$

$$\Delta' = \tfrac{1}{2} RR' . R'R'' \cos. \tfrac{1}{2}B = \frac{ac \cos. \tfrac{1}{2}B}{2 \sin. \tfrac{1}{2}A \sin. \tfrac{1}{2}C}$$ und

weil $r = b \frac{\sin. \frac{1}{2}A \sin. \frac{1}{2}C}{\cos. \frac{1}{2}B}$, $= \frac{abc}{2r}$, wie oben (266.)

139.

Der Halbmesser des um das Dreieck $RR'R''$ beschriebenen Kreises ist gleich einer seiner Seiten, dividirt durch den zweifachen Sinus des gegenüberliegenden Winkels, also ist $R' = \frac{RR'}{2 \cos. \frac{1}{2}C}$, folglich, weil $RR' = \frac{c}{\sin. \frac{1}{2}C}$ (267.),
$R = \frac{c}{2 \sin. \frac{1}{2}C \cos. \frac{1}{2}C}$ oder

$$268. \quad R' = \frac{c}{\sin. \frac{1}{2}C}.$$

Der Halbmesser des Kreises um ABC ist $= \frac{c}{2 \sin. C}$, also ist der Halbmesser des Kreises um $RR'R''$ gerade doppelt so groß, als der Halbmesser des Kreises um ABC.

Diejenigen Halbmesser des Kreises um $RR'R''$, welche durch die Ecken R, R', R'' gehen, nämlich Rr'', $R'r''$ und $R''r''$, wenn r'' der Mittelpunkt ist, stehen auf den Seiten des Dreiecks ABC senkrecht, denn es ist z. B.

$$R''r''R = 2R' = 2\varrho - B,$$

also sind in dem gleichschenkligen Dreieck $R'r''R$ die Winkel

$$r''R''R = r''RR'' = \tfrac{1}{2}B,$$

folglich ist in dem Dreieck $R''BD$ der Winkel bei D ein rechter, und so die andern.

140.

Der Punkt r in der Figur sey der Mittelpunkt des Kreises um ABC, r' der Mittelpunkt des Kreises um ABC, r'' der

Mittelpunkt des Kreises um $RR'R''$, Br, $B'r'$, $B''r''$, sollen Perpendikel aus r, r' und r'' auf RR'' seyn, so ist

I. $Br = r\,\text{cosec.}\tfrac{1}{2}B = a\dfrac{\sin.\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}A}.\text{cosec.}\tfrac{1}{2}B$

$= a\dfrac{\sin.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}A}$. Nun ist $R = \dfrac{a}{2\sin.A}$ oder $a = 2R\sin.A$,

also $Br = 2R\sin.A\dfrac{\sin.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}A}$ oder

$$Br = 4R\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}C.$$

II. $B'r' = Br'\sin.r'BR$, aber $r'BC = \rho - A$,

weil $Br'C = 2A$ und $Br' = Cr$,

folglich $r'BR$ oder $r'BC + CBR = \rho - A + \rho - \tfrac{1}{2}B$

$= \rho - \tfrac{1}{2}A + \rho - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}A = \rho + \tfrac{1}{2}(C - A)$, also ist

$$B'r' = R\cos.\tfrac{1}{2}(A - C).$$

III. $B''r''R = R' = \rho - \tfrac{1}{2}B$ und

$Rr'' = 2R$ (§. 139.). Also, weil $B''r'' = Rr''\cos.B''r'R$

$$B''r'' = 2R\sin.\tfrac{1}{2}BB$$

IV. Ferner ist $BB' = r'B\cos.rBB' = R\sin.\tfrac{1}{2}(A - C)$

V. $BB'' = RB - RB''$. Aber $RB = a\dfrac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}A}$

und $RB'' = Rr''\sin.R' = 2R\cos.\tfrac{1}{2}B$, also

$$BB'' = a\frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}A} - 2R\cos.\tfrac{1}{2}B \text{ oder}$$

$$BB'' = \frac{a}{2\sin.A}.\frac{2\sin.A\cos.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}A} - 2R\cos.\tfrac{1}{2}B \text{ oder}$$

$$BB'' = R.4\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}C - 2R\cos.\tfrac{1}{2}B \text{ oder}$$

$$BB'' = 2R(2\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}C - \cos.\tfrac{1}{2}B).$$

Aber $\tfrac{1}{2}B = \rho - \tfrac{1}{2}(A + C)$, also

$\cos.\tfrac{1}{2}B = \sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}C + \cos.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}C$, also

$BB'' = 2R(\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}C - \cos.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}C)$ oder

$BB'' = 2R\sin.\tfrac{1}{2}(A - C)$.

Aus (I. und III.) folgt

$$Br + B''r'' = 4R\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}C + 2R\sin.\tfrac{1}{2}B)$$
$$= 2R(2\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}C + \sin.\tfrac{1}{2}B)$$
$$= 2R(2\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}C + \cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}C - \sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}C)$$
$$= 2R(\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}C + \cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}C)$$
$$= 2R\cos.\tfrac{1}{2}(A - C).$$

Zufolge (II.) aber ist $B'r' = R\cos.\tfrac{1}{2}(A - C)$, also ist

$$269.\quad \frac{Br + B''r''}{2} = B'r'.$$

Aus (IV. und V.) aber folgt

$$270.\quad BB'' = 2BB',$$

daraus folgt, daß $rr'r''$ eine gerade Linie und $rr' = r'r''$ ist, das heißt, daß die Mittelpunkte an drei Kreise, in ABC, um ABC und um $RR'R''$ in einer geraden Linie liegen, der Mittelpunkt des Kreises in ABC aber mitten zwischen die Mittelpunkte der Kreise in ABC und um $RR'R''$ fällt.

141.

Der Halbmesser der Kreise um die äußern Dreiecke BCR, ACR' und ABR'' sind

$$\frac{a}{2\cos.\tfrac{1}{2}A},\quad \frac{b}{2\cos.\tfrac{1}{2}B},\quad \frac{c}{2\cos.\tfrac{1}{2}C},$$

also ist, wenn solche P, P' und P'' heißen,

$$PP'P'' = \frac{abc}{8\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\cos.\tfrac{1}{2}C} = \frac{abc}{2(\sin.A + \sin.B + \sin.C)}\ (\S.118.)$$

$$= \frac{abc\sin.A}{2\sin.A(\sin.A + \sin.B + \sin.C)} = \frac{abc}{2\sin.A}\cdot\frac{a}{a+b+c}$$

$$= \frac{abcR}{a+b+c}\ (244.).$$ Aber $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr\ (256.)$, also ist

271. $PP'P'' = 2R^2r$,

das heißt: das Produkt der Halbmesser der Kreise um die drei äußern Dreiecke BCR, ACR′ und ABR″ ist gleich dem doppelten Produkte vom Quadrat des Halbmessers des Kreises um ABC in den Halbmesser des Kreises in ABC.

Es giebt gewiß noch mehrere recht einfache und merkwürdige Sätze für diese vier Kreise, und es ist in der That bewundernswürdig, daß eine so einfache Figur, wie das Dreieck, so unerschöpflich an Eigenschaften ist. Wie viele noch unbekannte Eigenschaften anderer Figuren mag es nicht geben!

7.

Einige Bemerkungen über die Differential- und Integral-Rechnung.

I. Ueber die Principien der Rechnung.

142.

Man kann bekanntlich dem algebraischen Ausdrucke einer Größe, die von andern Größen abhängt, verschiedene und oft beliebige Formen geben. Man kann z. B. einen Bruch in andere Brüche zerlegen, oder Zähler und Nenner durch Addition, Multiplication oder Potenziirung verändern, oder den Bruch in eine Reihe verwandeln u. dgl.; z. B. statt des Bruchs $y = \frac{1}{1 - x^2}$ kann man schreiben $y = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}$ oder $y = \frac{1 + x^2}{1 - x^4}$ oder $y = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \ldots + \frac{x^{2n}}{-x^2}$ u. s. w. Alle diese Ausdrücke bedeuten alle völlig Eins und dasselbe.

143.

Man kann ferner die veränderte Form eines Ausdrucks willkührlich im Voraus annehmen, und aus den Eigenschaften des gegebenen Ausdrucks die in die willkürliche Form eingeführte neue Größe hiernach bestimmen, welches das vielfältig vorkommende Verfahren der Descartschen Methode der unbestimmten Coefficienten ist. Man kann z. B. setzen, der obige

M:

Bruch $\frac{1}{1-x^2}$ soll auf die Form $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3 \ldots\ldots$ gebracht werden, so muß man aus der gegebenen Größe $\frac{1}{1-x^2}$ die unbestimmten nun eingeführten Größen α, β, γ zu bestimmen suchen. Dieses geschieht hier, wenn man die Gleichung $\frac{1}{1-x^2}=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3 \ldots\ldots$ mit $1-x^2$ multiplicirt. Man erhält

$$1=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4 \ldots$$
$$-x^2-\alpha x^3-\beta x^4 \ldots$$

und weil die Coefficienten zu gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung gleich seyn müssen, $\alpha=0$, $\beta-1=0$, also $\beta=1$; $\gamma-\alpha=0$, also $\gamma=0$, $\delta-\beta=0$, also $\delta=\beta=1$ u. s. w., also

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4 \ldots\ldots$$

144.

Ist für einen gegebenen Ausdruck eine Form angenommen worden, die er seiner Natur nach nicht haben kann, so zeigt sich solches unfehlbar dadurch, daß man für die unbestimmten Coefficienten gar nichts oder unmögliche Größen findet. So war es in dem oben genommenen Beispiele des Bruches $\frac{1}{1-x^2}$. Die Form $1+\alpha x+\beta x^2 \ldots\ldots$ ist eine solche, die dieser Bruch gar nicht bekommen kann. Sie war unrichtig angenommen, was man im Voraus ohne besondere Hülfsmittel nicht wissen konnte, daher fand man auch $\alpha=0$, $\gamma=0$ 2c. Die richtige Form wäre gewesen $1+\beta x^2+\delta x^4 \ldots$, welches aber die Rechnung anzeigte, und nothwendig anzeigen mußte, weil man, wenn man etwas anders Unrichtiges gefunden hätte, nothwendig hätte falsch gerechnet haben müssen.

Man kann sich ohne Zweifel unbedingt auf die Rechnung verlassen. Man ist also in der Wahl der Form, auf welche man einen Ausdruck bringen will, durchaus nicht beschränkt.

145.

Man darf also ganz allgemein verlangen, z. B. eine beliebige von x und andern Größen abhängende Größe fx solle auf die Form

$$fx = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots.$$

gebracht werden, in welcher die Coefficienten α, β, $\gamma \ldots$ kein x enthalten, und welche Form sich zu den verschiedenen Rechnungen mit einer Größe, wie fx, und zu den Anwendungen derselben auf concrete Fälle besonders eignet. Ist es möglich, daß die Größe fx auf diese Form gebracht werden kann, so wird man für die unbestimmten Coefficienten α, β, $\gamma \ldots.$ ihre gehörigen Werthe finden. Ist es nicht möglich, so muß solches die Rechnung nothwendig anzeigen.

146.

Offenbar werden die Coefficienten immer wieder andere seyn, für jede andere Zusammensetzung der Größe fx, die f anzeigt, und die Aufgabe besteht darin, diese Coefficienten aus den Eigenschaften und der Zusammensetzungs-Art der Größe fx zu finden, wie es z. B. oben bei dem Bruch $fx = \frac{1}{1-x^2}$ der Fall war.

147.

Bei dieser Aufgabe ist die erste Frage, ob nicht zwischen den Größen α, β, $\gamma \ldots.$ allgemein irgend ein, für jede beliebige Zusammensetzungs-Art der Größe fx geltendes Verhältniß Statt finde, welches in der That der Fall ist.

Man lasse nämlich die Größe x um die Größe k sich verändern, so geht $fx = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ in

$$f(x+k) = \alpha + \beta(x+k) + \gamma(x+k)^2 \ldots + \mu(x+k)^m \ldots$$

über. Man entwickele irgend ein Glied der Reihe rechter Hand, z. B. das Glied $\mu(x+k)^m$, so ist, vermöge des binomischen Lehrsatzes, der bekanntlich für ganze positive Exponenten, wie er hier nöthig ist, leicht und strenge, z. B. durch die bloße Multiplication oder Combination der beiden Theile des Binomiums bewiesen werden kann, $\mu(x+k)^m = \mu\left(x^m + mx^{m-1}k + m.(m-1).x^{m-2}\frac{k^2}{2} \ldots\right)$. Die Glieder der entwickelten Größe von $(x+k)^m$ aber haben die Eigenschaft, daß aus dem Coefficienten von k derjenige von $\frac{k^2}{2}$, aus diesem derjenige zu $\frac{k^3}{2 \cdot 3}$ ꝛc. ganz eben so gefunden wird, wie aus dem ersten Gliede x^m der Coefficient zu k. Denn dieser letzte wird, wie man sieht, aus der Größe x^m gefunden, wenn man den Exponenten m dieser Größe um Eins vermindert, und die entstehende Größe x^{m-1} mit dem Exponenten m multiplicirt. Wendet man ganz das nämliche Verfahren auf den Coefficienten mx^{m-1} von k an, so kommt $m.(m-1)x^{m-2}$, welches der Coefficient von $\frac{k^2}{2}$ ist ꝛc. Dieses gilt nun für jedes einzelne Glied der Reihe $\alpha + \beta(x+k) + \gamma(x+k)^2 \ldots$, folglich auch für ihre Summe. Bezieht man daher das Verfahren, welches angewendet werden muß, um aus der Summe der ersten Glieder der Reihe ohne k, die Summe aller Coefficienten zu k zu finden durch ein vor die erste Summe gesetztes d, so kann man durch ein wiederholtes d oder durch d^2 das Verfahren bezeichnen, durch welches sich aus der Summe der Coefficienten zu k derjenige der Coefficienten von $\frac{k^2}{2}$ finden läßt u. s. w.

Die Summe der ersten Glieder ohne k ist aber nichts anders, als fx selbst, denn sie ist $\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$, welches $= fx$ war. Bezeichnet daher dfx das Verfahren, welches den Coefficienten von k in $f(x+k)$ giebt, so kann $d(dfx)$ oder d^2fx dasjenige Verfahren bezeichnen, welches den Coefficienten zu $\frac{k^2}{2}$ giebt u. s. w. Also ist überhaupt, ganz allgemein,

und ohne alle Rücksicht auf die Zusammensetzungs-Form von fx

$$f(x+k)=fx+kdfx+\frac{k^2}{2}d^2fx+\frac{k^3}{2\cdot3}d^3fx\ldots\ldots$$

das heißt: die Glieder der entwickelten Größe $f(x+k)$, wenn man im Voraus festsetzt, daß in derselben k nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkommen soll, haben, ganz allgemein, ohne Rücksicht auf die Art der Zusammensetzung von fx, die Eigenschaft, daß sie nach der Reihe eines aus dem andern ganz durch einerlei Operation gefunden werden, nämlich: wenn dfx den Coefficienten zu k in der Entwickelung von $f(x+k)$ bedeutet, so ist der Coefficient zu $\frac{k^2}{2}$ der nämliche, den man erhalten würde, wenn man in dfx von neuem $x+k$ statt x setzte, und den Coefficienten des ersten Gliedes dieser neuen Entwickelung von $df(x+k)$ nähme, und so die folgenden.

Setzt man nun in $f(x+k)$ und dessen obige Entwickelung $k=x$ und $x=o$ und zeigt durch eine vor x gesetzte o an, daß $x=o$ seyn soll, so kommt

$$fx=fox+xdfox+x^2\frac{d^2fox}{2}+x^3\frac{d^3fox}{2\cdot3}\ldots\ldots$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit der Anfangs supponirten mit unbestimmten Coefficienten

$$fx=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\ldots\ldots$$

so findet man, daß $\alpha=fox$, $\beta=dfox$, $\gamma=\frac{d^2fox}{2}$ u. s. w. ist, und daß also diese Coefficienten wirklich ganz allgemein unter einander in einem gewissen Verhältniß stehen oder einer von dem andern abhänge.

148.

Die gewöhnliche Art, wie man dieses allgemeine Gesetz der Entwickelung von $f(x+k)$ findet, weicht von der vorigen ab.

Sie mag, weil sie nicht weniger klar ist, nicht übergangen werden.

Ist nämlich z. B. x innerhalb irgend eines algebraischen, durch fx angedeuteten Ausdrucks eine Größe, die verschiedene, zuweilen unzählige, Werthe erhalten kann, während die andern etwa in dem Ausdrucke noch vorkommenden Größen die nämlichen bleiben, wie z. B. die Abscisse einer Curve, die unzählige verschiedene Werthe bekommen kann, während die constanten Größen, welche die Curve bestimmen, z. B. die Axe und andere Parameter die nämlichen bleiben, so kann man irgend zwei verschiedene Werthe von x durch x und x + k bezeichnen. k bedeutet den Unterschied dieser beiden Werthe. Verlangt man nun, der Ausdruck fx für den Werth x + k von x, also der Ausdruck f(x + k) solle so entwickelt werden, daß k nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten erscheint, so daß also

$$f(x+k) = p + qk + rk^2 + sk^3 \ldots\ldots$$

ist, wenn p, q, r, s.... Größen sind, die kein k, sondern nur x und Constanten enthalten, so verändere man x um eine neue Größe e, so daß f(x + e + k) aus f(x + k) wird, so ist klar, daß sich p, q, r, s.... ebenfalls sämmtlich verändern werden, weil man in diese Größen ebenfalls x + e statt x setzen muß. Da aber p, q, r, s eben wie fx selbst, Größen sind, die von x und Constanten abhängen, so kann man dem, was aus ihnen wird, wenn man x + e statt x setzt, eine Form geben, die der von f(x + k) ähnlich ist. Man kann also das, was aus p, q, r, s.... wird, wenn man darin x + e statt x setzt, durch

$$p' + p''e + p'''e^2 \ldots\ldots$$
$$q' + q''e + q'''e^2 \ldots\ \text{u. s. w.,}$$

bezeichnen, folglich

$$\begin{aligned} f(x+k+e) = {} & p' + p''e + p'''e^2 + p''''e^3 \ldots\ldots \\ & + k(q' + q''e + q'''e^2 + q''''e^3 \ldots\ldots) \\ & + k^2(r' + r''e + r'''e^2 + r''''e^3 \ldots\ldots) \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

setzen. Nun erhält man aber offenbar die nämliche Größe

$f(x+k+e)$, wenn man k statt x um e sich vermindern läßt, also ist auch, weil $f(x+k)=p+qk+rk^2\ldots$ war,

$$f(x+k+e)=p+q(k+e)+r(k+e)^2+s(k+e)^3\ldots$$

oder

$$\begin{aligned} f(x+k+e) &= p+qe+re^2+se^3\ldots \\ &\quad +k(q+2re+3se^2\ldots) \\ &\quad +k^2(r+3se\ldots)\text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

Vergleicht man in den beiden Ausdrücken von $f(x+k+e)$ gleiche Coefficienten von k und e, so findet sich erstlich aus den ersten beiden verticalen Reihen von Gliedern

$$p'=p,\ q'=q,\ r'=r\text{ ꝛc.},$$

welches anzeigt, daß die ersten Glieder p', q', $r'\ldots$ in der Entwickelung der Größen p, q, r ...., wenn man darin $x+e$ statt x setzt, die Größen selbst sind.

Die beiden zweiten verticalen Reihen geben

$$p''=q,\ q''=2r,\ r''=3s\text{ ꝛc., oder}$$
$$q=p'',\ r=\tfrac{1}{2}q'',\ s=\tfrac{1}{3}r''\ldots,$$

welches anzeigt, daß der zweite Coefficient q in der Entwickelung von $f(x+k)$ dem zweiten Coefficienten p'' in der Entwickelung von p, der dritte Coefficient r in der Entwickelung von $f(x+k)$ dem halben zweiten Coefficienten q'' in der Entwickelung von q, der vierte Coefficient s ein Dritttheil des zweiten Coefficienten r'' in der Entwickelung von r gleich sey u. s. w., daß also der zweite Coefficient q in der Entwickelung von $f(x+k)$ aus dem ersten Gliede p gefunden werde, wenn man in demselben $x+e$ statt x setzt, und in der entstehenden Entwickelung den Coefficienten zu e nimmt, der Coefficient r aus q, wenn man in q, $x+e$ statt x setzt, und den halben Coefficienten zu e nimmt, der Coefficient s aus r, wenn man in r, $x+e$ statt x setzt, und $\frac{1}{3}$ des Coefficienten zu e nimmt u. s. w., immer einen aus dem andern. Da hierdurch schon das allgemeine Gesetz der Abhängigkeit der Coefficienten p, q, r bestimmt ist, so braucht man

die folgenden verticalen Reihen nicht mehr, die außerdem das Nämliche geben.

Nun ist aber das erste Glied p die Größe fx selbst, denn $f(x+k) = p + qk + rk^2 \ldots$, giebt, wenn man $k = 0$ setzt, $fx = p$. Also wird q gefunden, wenn man in fx, $x + e$ statt x setzt, und den Coefficienten zu e nimmt. Bezeichnet man dieses Verfahren durch ein d, so kann man schreiben $q = dfx$. Nun wurde r aus q gefunden, wenn man in q, $x + e$ statt e setzt, und den halben Coefficienten zu e nimmt. Das Verfahren ist völlig das vorige, und muß also jetzt nothwendig wiederum durch d bezeichnet werden; folglich ist $r = \frac{1}{2} d dfx$ oder $r = \frac{1}{2} d^2 fx$. Ferner wurde s aus r gefunden, wenn man in r, $x + e$ statt x setzt und $\frac{1}{3}$ des Coefficienten zu e nimmt, also abermals durch das gleiche Verfahren. Also ist $s = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d d^2 fx$ oder $s = \frac{d^3 fx}{2 \cdot 3}$ ꝛc. Mithin ist überhaupt

$$f(x+k) = fx + kdfx + \frac{k^2}{2} d^2 fx + \frac{k^3}{2 \cdot 3} d^3 fx \ldots,$$

und es findet sich, daß für jede beliebige Zusammensetzungs-Art der Größe fx die Coefficienten p, q, r, s .... zu k^1, k^0, k^2, k^3 in der Entwickelung von $f(x+k)$, wenn man verlangt, daß dieselben die Gestalt $f(x+k) = p + qk + rk^2 \ldots$, haben soll, allemal der Reihe nach völlig durch eben das Verfahren einer aus dem andern abgeleitet werden müssen, durch welches man den Coefficienten zu k aus der Größe fx selbst findet. Diese Entwickelung von $f(x+k)$ drückt das Nämliche aus, was der unter dem Namen des Taylorschen bekannte Satz enthält, allein ihre Herleitung ist von der Herleitung dieses Satzes ganz verschieden. Hier findet sich die Entwickelung unmittelbar aus gewöhnlichen algebraischen Sätzen. Der Taylorsche Satz hingegen wird rückwärts durch die Differential-Rechnung gefunden, die aber, wenn sie sich auf ihn nicht gründet, fremdartige Begriffe zu Hülfe nehmen muß, welche die wahren Principien nicht ersetzen.

149.

Enthält ein Ausdruck mehrere veränderliche Größen, so braucht man die obige Nachweisung der Abhängigkeit der Coefficienten von einander nicht zu wiederholen, sondern man darf nur die Größen abgesondert, eine nach der andern, sich verändern lassen, welches auch für mehrere Größen etwas Aehnliches giebt.

150.

Auf dieser Abhängigkeit der Coefficienten p, q, r von einander beruht nun die gesammte Differential = und Integral-Rechnung. Ihre Basis ist jenes Verhältniß zwischen den Coefficienten p, q, r ..., und dasselbe giebt ihr das Daseyn. Man kann nämlich schon, wenn man nur den ersten Coefficienten aus der ursprünglichen Größe abzuleiten weiß, sogleich die ganze Entwickelung vollenden, denn jeder folgende Coefficient ist der erste in der Entwickelung des vorhergehenden. Man kann also durch jene allgemeine Eigenschaften der Coefficienten schon jedem beliebigen Ausdruck die Gestalt $p + qk + rk^2 \ldots.$, und wenn man $x = 0$ und $k = x$ setzt, jedem beliebigen Ausdruck fx die Gestalt $\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots.$, geben, wo α, β, γ.. kein x mehr enthält, welches für den Calcul von großer Wichtigkeit ist. Der verwandelte Ausdruck ist übrigens keinesweges nothwendig eine unendliche Reihe, sondern er bricht ab, sobald irgend ein Coefficient kein x mehr enthält; z. B. wenn $fx = x^3$, so ist $f(x + k) = (x + k)^3 = x^3 + 3x^2k + 3xk^2 + k^3$. Hier ist $dfx = 3x^2$, $d^2fx = 3.2x$, $d^3fx = 3.2.1 . d^4fx = 0$, $d^5fx = 0$ u. s. w. Der Nutzen einer solchen Verwandlung ist höchst mannichfach.

Sucht man z. B. die geometrische Bedeutung, oder, wenn von einem Gegenstande aus der Mechanik, oder sonst irgend etwas Anderm die Rede ist, sonst die zugehörige Bedeutung des ersten Coefficienten auf, wenn diejenige der Größe fx gegeben ist, oder umgekehrt, so findet man durch den bloßen Calcul, nämlich aus der Art der Abhängigkeit des ersten Coefficienten von der Stammgröße, welche sich nothwendig nach der Zusammensetzungs = Art derselben richtet, eine aus der andern. Auch die

zweiten und folgenden Coefficienten haben ihre Bedeutungen an dem Gegenstande, auf welchen sich die Stammgröße bezieht, und eines aus dem andern finden, erfordert nur die Wiederholung der nämlichen Operation. Die Coefficienten aus der Stammgröße ableiten, hat man Differentiiren, das umgekehrte Verfahren Integriren genannt, aber, wie weiter unten gezeigt werden wird, sehr uneigentlich. Die große Ausdehnung der Anwendung beider Rechnungs-Methoden ist übrigens bekannt.

151.

Hier soll blos erinnert werden, daß wie oben bei den Bemerkungen über das Haupt-Princip der Differential- und Integral-Rechnung deutlich zu sehen, durchaus keine Sätze oder Ansichten dabei nöthig sind, die nicht die Algebra schon enthielte, und die nicht jeden Augenblick auch außer der sogenannten Differential- und Integral-Rechnung gebraucht würden. So ist es mit der Methode der unbestimmten Coefficienten, die die Algebra lehrt, und auf welcher hier Alles beruht.

Es läßt sich also mit Grunde sagen, daß die Differential- und Integral-Rechnung sich von der Algebra mit Unrecht absondern. Sie sind nichts weiter, als ein Abschnitt derselben, und Kramp z. B. hat sehr Recht, wenn er schon in seiner Algebra die Derivationen, die nichts anders sind, als die Coefficienten der obigen Entwickelung, einführt. Man schadet unstreitig der Klarheit der Begriffe, wenn man andere fremde Sätze und Ansichten in die Differential- und Integral-Rechnung hinein mischt, die dazu nicht nothwendig sind. Die Vereinigung der Differential- und Integral-Rechnung mit der Algebra wird auch wahrscheinlich nicht lange mehr ausbleiben, seitdem einmal die Hauptschwierigkeit überwunden, nämlich die Principien aus bloßen algebraischen Sätzen hergeleitet sind, wovon das Verdienst unstreitig Lagrange zugehört, denn in seinen beiden Werken: Théorie des fonctions und Leçons sur le calcul des fonctions hat derselbe diese Herleitung in der Hauptsache bis zur Evidenz gegeben.

Bis auf Lagrange suchte man sich bekanntlich, wenn es darauf ankam, die Methode zu begründen, mit dem Unendlich-

Großen und dem Unendlich = Kleinen zu helfen. Allein von dem Unendlichen hat der menschliche Verstand schwerlich etwas mehr, als die Ahnung, aber keinen Begriff, und je mehr Worte man über Dinge macht, die außer der menschlichen Erkenntniß liegen, je mehr nur verhüllet man sie, statt sie zu erklären. Zwar windet sich gerade aus dem unbegreiflichen Unendlichen des Menschen Erkenntniß hervor und verliert sich auch in dem Unendlichen. Aber nur zwischen diesen beiden Unendlichen liegt, was einem unvollkommenen Wesen klar ist. Des Unendlichen wegen sonderte sich die Differential = und Integral = Rechnung von der Algebra ab, und maßte sich den Rang eines höhern Theils der Mathematik an; allein gewiß beides mit Unrecht. Wie auch aus der obigen Darstellung zu sehen, kommt bei der Begründung ihrer Principien auch nicht eine Spur vom Unendlichen vor, und durch eine vollständige Abhandlung der Rechnung, in der Absicht geschrieben, das Schwere leicht und das Dunkle klar zu machen, würde sich zeigen lassen, daß in dem ganzen Umfange der Rechnung das Unendliche nicht einmal zu nennen nöthig sey. Was den Rang des Höhern betrifft, so liegt derselbe vielleicht eher in den Elementen, als in einer abgesonderten Methode. Es ließe sich wohl beweisen, daß die Differential = und Integral = Rechnung der nämlichen Fassungskraft zugänglich zu machen sey, die den Elementen gewachsen ist, und ich meines Theils habe die feste Ueberzeugung, das die Elemente des Euclides ganz zu ergründen, selbst mehr Scharfsinn gehört, als zu der gesammten Differential= und Integral=Rechnung. Die Algebra zeichnet sich von den ältern Methoden durch die Leichtigkeit aus, mit welcher sie zu den Resultaten führt, und nichts weiter, als ein Theil der Algebra ist die Differential = und Integral = Rechnung, selbst nicht der schwierigste; denn die Theorie der Gleichungen, glaube ich, kann man schwieriger nennen, vielleicht deshalb, weil sie weniger vollendet ist. Wird jetzt die Differential= und Integral = Rechnung dem Lernenden schwer, so liegt es wahrscheinlich nicht an ihm, sondern an dem Vortrage der Wissenschaft selbst; denn nur die Begriffe pflegen dem Verstande schwer zu fallen, die nicht mit sich selbst im Reinen sind. Leicht ist alles Klare, schwer das Dunkle und Unvollendete. Wie viel

sich durch einen einfachen anspruchlosen Vortrag, der das sogenannte Höhere elementar zu machen sucht, auch für die Differential- und Integral-Rechnung gewinnen lasse, habe ich aus einem merkwürdigen Versuche gesehen. Ich habe einige junge Leute von verschiedener Fassungskraft, denen ich Algebra vortragen sollte, und die von der Differential- und Integral-Rechnung noch keine bestimmten Begriffe hatten, ungefähr auf einem Wege, wie der obige, bei den Principien, mitten in die Grundlehren der Differential- und Integral-Rechnung hinein geführt, ohne ihnen zu sagen, wo sie wären. Keiner von ihnen fand einen Anstoß. Manches in der Algebra war ihnen schwer geworden. Hier fand Niemand Schwierigkeiten, und nicht gering war ihre Verwunderung, als sie am Ende hörten, sie hätten die Anfänge der Differential- und Integral-Rechnung gelernt. Die billige Frage, wo denn nun eigentlich das Unendliche nothwendig sey, von welchem sie so viel gehört, konnte ich ihnen nicht befriedigend beantworten, denn ich weiß es wirklich nicht.

152.

Die Differential- und Integral-Rechnung, auch die Variations-Rechnung mit eingeschlossen, von welcher letztern ich bei einer andern Gelegenheit zu reden und näher nachzuweisen hoffe, daß auch sie elementar sich machen läßt, ist recht eigentlich ein zweiter Abschnitt der Algebra, der sich durch nichts von ihr unterscheidet, als durch größere Allgemeinheit.

Die Arithmetik lehrt, mit bestimmten Zahlen oder Ziffern rechnen, die Algebra allgemeiner mit unbestimmten Zahlen oder Buchstaben, für die es also gleichgültig ist, ob sie bekannt oder unbekannt sind, jedoch nach bestimmten Formen oder nach bestimmten Gestalten der Ausdrücke. In der Differential- und Integral-Rechnung kann noch allgemeiner auch die Gestalt der Ausdrücke unbestimmt seyn. Sie beruht auf den obigen Gesetzen der Coefficienten für beliebige Formen. Doch hat sie auch in vielen Anwendungen eben so bestimmte Formen der Ausdrücke, als der Algebra übriger Theil. Sie geht von der einzigen ihr eigenthümlichen Idee aus, den Ausdrücken eine Gestalt zu geben, in welcher die veränderlichen Größen abgesondert sind, wie oben.

Die Mittel aber, deren sie zu der Absonderung bedarf, liefert vollständig die Algebra.

153.

Es läßt sich fragen, warum ich hier von Neuem über die Principien der Differential- und Integral-Rechnung gesprochen habe, da solches schon in andern Büchern geschehen, auch Lagrange so vortrefflich und ausführlich davon gehandelt, ja ich selbst in dem ersten Theil meines Versuches über diese Rechnung, der 1813 bei Vandenhoek und Ruprecht in Göttingen erschienen ist, und späterhin in einer kleinen Schrift über die Anwendung der Rechnung, Berlin, bei Maurer 1816, davon gehandelt habe. Eines Theils hatte ich, wie sich aus der Vergleichung des Obigen mit dem Vorherigen zeigen wird, Einiges nachzuholen, andern Theils ist der Gegenstand immer noch ziemlich neu, und es scheint, daß man noch immer nicht oft und angelegentlich genug davon reden könne, da die ältere Methode noch eifrige Vertheidiger hat.

Nachholen zu müssen glaubte ich vorzüglich einen Versuch, den Umstand noch deutlicher zu machen, daß man die Form der entwickelten Größe $f(x+k)$ oder fx willkührlich annehmen könne und müsse. Gewöhnlich pflegt man einen Beweis voraus zu schicken, daß die Größe $f(x+k)$ in einen Ausdruck von der Gestalt $p+kq+k^2r\ldots$ verwandelt werden könne, allein ein solcher Beweis ist nach meiner Ueberzeugung weder nöthig, noch möglich. Denn der Satz selbst findet wirklich nicht Statt, folglich kann er sich auch nicht beweisen lassen. Man kann keinesweges immer $f(x+k)$ in einen Ausdruck von der Gestalt $p+kq+k^2r\ldots$ verwandeln, z. B. den obigen Bruch $\frac{1}{1-x^2}$ nicht, der vielmehr die Gestalt $p+k^2q+k^4r\ldots$ haben müßte, den Logarithmen von x nicht, alle Größen für bestimmte einzelne Werthe von x nicht, die einen oder mehrere Coefficienten unendlich groß machen. Die Verwandlung ist nur da möglich, wo sich wirkliche Werthe für die Coefficienten finden lassen und erst durch die Wirklichkeit dieser Coefficienten wird die Möglichkeit der Verwandlung bewiesen.

II. Ueber die hier vorkommenden Bezeichnungen und Benennungen.

154.

Das oben zur Unterscheidung der Coefficienten von einander und von der ursprünglichen Größe gebrauchte d bezeichnet eine Operation, keine Größe, eben so wenig wie das f in fx und der Punkt für die Multiplication, die Zeichen + und —, der Exponent von Potenzen u. s. w. Erst wenn hinter d die zusammengesetzte Größe steht, auf welche die Operation angewendet werden soll, wie dfx, bezeichnet das Ganze diejenige Größe, welche die Operation giebt; ebenfalls wie fx. Die Bedeutung des Zeichens d ist derjenigen des Zeichens f um so ähnlicher, da sich die Operation, welche d in diesem oder jenem Falle anzeigt, allemal genau nach derjenigen richtet, welche für denselben Fall f bezeichnet.

Die durch d bezeichnete Operation bestand aber darin, daß innerhalb der Größe fx, die aus der veränderlichen x und andern beliebigen constanten Größen zusammengesetzt ist, die Größe x um k verändert, und aus der Entwickelung von $f(x+k)$ der Coefficient zu k genommen werden sollte. Ist nur eine veränderliche Größe vorhanden, wie hier, so ist das bloße d vor fx hinreichend. Enthält aber die zusammengesetzte Größe mehrere veränderliche Größen, so muß nothwendig noch angezeigt werden, auf welche von diesen Größen sich d beziehen soll, denn man kann allemal die veränderlichen Größen nur eine nach der andern, nicht alle zugleich verändern. Offenbar wird diese Anzeige am besten geschehen, wenn man die Größe, auf welche sich d bezieht, bei dem d selbst bemerkt. Ob solches neben, oder über, oder unter der Größe geschieht, ist in der Sache unstreitig einerlei. Aber diejenige Zusammenstellung wird die beste seyn, welche sich am wenigsten mit etwas anderm verwechseln läßt. Mir hat es am besten geschienen, daß man die veränderliche Größe unter das d setzt, denn da d keine Größe, sondern nur eine Operation bedeutet, so kann man diese Form nicht mit der Division verwechseln. Wenn also z. B. fxy eine aus x, y und Constanten zusammengesetzte Größe bedeutet, so würde man, um

anzuzeigen, daß innerhalb derselben x um k verändert und der Coefficient zu k genommen werden soll, $\frac{d}{x}fxy$ schreiben müssen, oder wenn das Aehnliche mit y geschehen soll, $\frac{d}{y}fxy$. Schriebe man für die Größe fxy einen einzelnen Buchstaben, z. B. $fxy = u$, so würde das erste durch $\frac{d}{x}u$, das andere durch $\frac{d}{y}u$ ausgedrückt werden müssen. Wollte man das x etwa vor das d setzen, so würde xdu verwechselt werden können mit dem Produkt von x in du. Schriebe man es hinter das d, so würde dxu mit dem Produkt von dx in u Aehnlichkeit haben. Das Einschließen in Klammern aber würde mühsam seyn und das Auge zu leicht verwirren. Rechts, oben an d, kann man x nicht setzen, weil es dadurch zum Exponenten wird. Es bliebe also nur noch übrig x links über, oder links oder rechts unter, oder gerade über, oder unter d zu setzen. Geschieht aber Eins oder das Andere ohne einen Strich zwischen x und d, so verliert man nicht allein an der Deutlichkeit, sondern man benimmt auch der Zeichen-Rechnung ein schon in derselben gebräuchliches Verfahren, Coefficienten von irgend einer andern bestimmten Bedeutung, z. B. Binomial- oder Polynomial-Coefficienten zubezeichnen, oder wo eine Menge von Größen vorkommen, eine von der andern zu unterscheiden. Daher hat mir die obige Art die beste geschienen.

In der Differential-Rechnung pflegt man sonst das, was hier z. B. $\frac{d}{x}u$ bedeutet, durch $\frac{du}{dx}$ zu bezeichnen, allein diese Bezeichnung deutet zu sehr etwas anders an, als daß sie passend seyn könnte, und es gehört wirklich ein unnützer Aufwand von Vorstellungskraft dazu, um sich in jedem Augenblick das darunter vorzustellen, was man bezeichnen wollte. Denn da du eine wirkliche Größe ist, so ist $\frac{du}{dx}$ ein Quotient, den man aber hier erst mühsam aufsuchen muß. Man versteht nämlich unter

du die gesammte Veränderung $qk + rk^2 + sk^3 \ldots$ von fx für ein unendlich kleines k, und unter dx eben das für die unabhängig veränderliche Größe x, also k. Auf diese Weise bedeutet freilich $\frac{du}{dx}$ den Coefficienten q, also das, was es bedeuten soll. Aber eines Theils ist der Begriff von Unendlichklein undeutlich, andern Theils paßt die Bezeichnung nicht gut zu dem andern einfacheren Fall, wenn nur eine veränderliche Größe vorhanden ist, oder man müßte immer $\frac{du}{dx}$, nie blos du schreiben, denn du allein bedeutet nicht q, was es bedeuten soll, sondern qk, und folglich immer o. Dann kommt man aber eben auf die Rechnung mit Nullen, welches das alte Uebel ist. Unbequem ist ferner die gewöhnliche Bezeichnung, wenn man zu der umgekehrten Differential-Rechnung, der sogenannten Integral-Rechnung, auf eine consequente Weise weiter gehen will, was sich nachher zeigen wird. Daher halte ich die Bezeichnung $\frac{d}{x}u$, $\frac{d}{y}u$ u. dergl. besser als $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ ꝛc.

Die Bezeichnung einer wiederholten Operation hat keine Schwierigkeit. $\frac{d^2}{x^2}u$ bedeutet, daß innerhalb der aus x, y und Constanten zusammengesetzten Größe $\frac{d}{x}u$, die Größe x um k verändert und der erste Coefficient von k genommen werden soll. $\frac{d^2}{xy}u$ die nämliche Operation mit der Größe $\frac{d}{y}u$, die, wie sich in der Rechnung selbst zeigt, das Nämliche mit der ähnlichen Operation nach y auf $\frac{d}{x}y$ giebt, weshalb $\frac{d^2}{xy}u$ und $\frac{d^2}{yx}u$ einander gleich sind. Die Bedeutung von $\frac{d^3}{x^3}u$, $\frac{d^3}{x^2y}u$, $\frac{d^4}{xy^3}u$, $\frac{d^4}{xyz^2}u$ ist nach dem Vorhergehenden durch sich selbst klar.

Ist eine Größe aus mehreren veränderlichen Größen zusammengesetzt, unter welchen auch schon Differential-Coefficienten

seyn können, welche aber alle selbst wieder von einer und der nämlichen Größe abhängen, sie mag unter ihnen befindlich seyn oder nicht, so kann man anzeigen sollen, daß diese eine gemeinschaftliche Größe überall verändert werden soll. Dieses läßt sich leicht auf die Weise thun, daß man die abhängige Größe in Klammern einschließt. Wenn z. B. $u = f(xyz\, dydz\, d^2yd^2z \ldots)$ wäre, wo y und z alle von der Größe x abhängen, so kann man durch $d(u)$ anzeigen, daß in allen Größen y, z, dy.... zugleich x und k verändert werden, und der Coefficient zu k genommen werden soll. Hängen alle Größen von einer andern fremden Größe w ab, so kann man schreiben $\frac{d}{w}(u)$.

Für eine veränderliche Größe x, die von keiner andern abhängt, ist allemal $dx = 1$, denn verändert man x um k, so kommt $x + k$, und hierin ist der Coefficient zu k, den dx bedeutet, $= 1$. Will man dem x während der Rechnung eine Abhängigkeit beilegen, so darf man nur durch dx statt 1 die Symmetrie des Ausdrucks in Hinsicht auf die Differential-Coefficienten herstellen, und dann dx nach der Natur der Abhängigkeit, die x erhalten hat, bestimmen.

Die gesammte Veränderung, die eine zusammengesetzte Größe, wie fx, durch die Veränderung ihres Elements x erfährt, kann man auch hier, wie gewöhnlich, durch Δfx bezeichnen, so daß in diesem Falle $\Delta fx = qk + rk^2 + sk^3 \ldots$ ist.

155.

Größen, wie $\frac{du}{dx}$, hier $\frac{d}{x}u$, nennt man sonst Differentiale, auch Differential-Coefficienten. Das Wort Differential ist von dem Worte Differenz hergenommen, und drückt also einen Begriff aus, der dem eines Unterschieds zweier Größen ähnlich ist, von welchem das Differential vielleicht nur durch die unendliche Kleinheit der dabei vorkommenden Größen verschieden seyn soll. Dieser Begriff und folglich die Benennung paßt aber, wenigstens auf die Größe q, r in $f(x + k) = p + qk + rk^2 \ldots$ nicht. Denn diese Größen sind nicht der Unterschied etwa zwischen fx und $f(x + k)$, welcher vielmehr Δfx ist, auch selbst

nicht für ein ∞ kleines k, auch nicht Theile dieses Unterschiedes, sondern nur einzelne Factoren in den Theilen des Unterschiedes. Diese Factoren können kleiner oder größer als der ganze Unterschied oder demselben gleich oder einige von ihnen $=0$ oder ∞ seyn, während der ganze Unterschied es nicht ist. Der Begriff derselben hat also mit dem eines Unterschiedes nicht das Geringste gemein. Sie sind Größen, die von der Stammgröße fx mittelst der durch d bezeichneten eigenthümlichen Operation, deren Beschaffenheit in jedem individuellen Fall von der Operation f abhängt, abgeleitet werden. Man muß daher, wenn man nicht den Begriff durch Worte, die andere Vorstellungen erregen, als sie sollen, verdunkeln will, nothwendig für die Größen q, r, s .... irgend ein anderes angemessenes Wort als Differential gebrauchen. Zu sagen, welches das beste sey, wäre anmaßend, aber so viel läßt sich mit Bestimmtheit sagen, daß das Wort Differential für die Coefficienten q, r, s ... nicht paßt. Da diese Größen aus der Stammgröße fx durch eine bestimmte Operation abgeleitet oder hergeleitet werden, so nennt sie Lagrange, fonctions derivées. Im Deutschen ist diese Benennung etwas weitläuftig und unbehülflich, denn z. B. die erste von fx nach x abgeleitete Function ist mehr Beschreibung als Benennung. Daher empfiehlt sich das kürzere Wort Ableitung mehr, z. B. erste Ableituug von fx nach x für $\frac{d}{x}fx$ u. s. w. Zwar ist diese Benennung allerdings nicht ganz grammatisch richtig, weil Ableitung mehr die Handlung des Ableitens, als die abgeleitete Größe bezeichnet; doch sind dergleichen Abkürzungen auch wohl in andern Fällen erlaubt. Will man ein fremdes Wort lieber, so kann man die Größen q, r, s... mit Arbogast, Derivationen nennen. Bis mir ein besserer Ausdruck bekannt geworden, werde ich die Benennung Ableitung beibehalten. Die Operation, welche d bezeichnet, heißt dann nothwendig ableiten, und zwar nach x, nach y u. s. w.

156.

Die Operation, welche der durch d bezeichneten entgegengesetzt ist, also die Umkehrung derselben, durch welche man rück=

wärts von einer abgeleiteten Größe zu der Stammgröße gelangt, bezeichnet man gewöhnlich durch ein ganz neues fremdes Zeichen, nämlich durch ein ſ vor den Differentialen. So bedeutet ſq, wenn q der erste Coefficient aus der Größe $f(x+k)=p+kq+k^2r\ldots\ldots$ ist die Stammgröße fx. Da aber dieses Zeichen ſ auf keine Weise zu erkennen giebt, daß die Operation, welche es anzeigen soll, blos die Umkehrung der durch d bezeichneten Ope- ist, worauf doch Alles ankömmt, vielmehr zu der Meinung verleitet, als wäre die Operation ſ eine ganz andere neue, die mit der Operation d nichts gemein hat, so ist es, schon unstreitig aus diesem Grunde, unpassend und der Deutlichkeit und Genauigkeit der Begriffe geradezu schädlich. Es ist aber obendrein auch unzureichend; denn die theilweise Operation nach einer einzelnen Größe bezeichnet es gar nicht, was doch eben so nothwendig ist, als bei der Differentiation. Wenn man z. B. den Inhalt eines Körpers ausdrücken will, dessen Oberfläche die Gleichung $z=fxy$ hat, so schreibt man nach der gewöhnlichen Art $\int\int z\,dx\,dy$. Hier muß aber gerade zuerst noch mit Worten erklärt werden, daß die umgekehrte Operation d auf die Größe $z\,dx\,dy$ erst in Beziehung auf die Größe x und hernach auf das Resultat auch noch in Beziehung auf die Größe y angewandt werden soll. Die Zeichen drücken dies auf keine Weise aus, und man weiß ohne die Erklärung durchaus nicht, worauf sich ein und das andere ſ bezieht. Bei der directen Operation kann man wenigstens diese einzelne Bezeichnung ausdrücken, z. B. $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, aber mit dem Zeichen ſ ist solches gar nicht möglich. Folglich ist dieses Zeichen eben so unzulänglich, als unrichtig.

Hat man einmal die directe Operation durch d und ihre Wiederholung wie Potenzen bezeichnet, so darf man unstreitig für die umgekehrte Operation gar kein neues Zeichen mehr nehmen, wenn man nicht geradezu gegen die Consequenz anstoßen und der Deutlichkeit des Begriffs den größten Schaden zufügen will. Bezeichnet man nämlich durch d^2 die Wiederholung der Operation d, so muß man nothwendig durch $\frac{1}{d}$ die umgekehrte Ope-

ration, durch $\frac{1}{d^2}$ ihre Wiederholung bezeichnen u. s. w., gerade wie es bei den Potenzen geschieht. Denn nach der Natur der zu bezeichnenden umgekehrten Operation, findet man aus ihrem Resultat rückwärts die Größe, auf welche man sie anwandte, z. B. aus $\frac{1}{d}u$ findet man wiederum u, wenn man die directe Operation d mit $\frac{1}{d}u$ vornimmt. Ist nun einmal angenommen, daß diese directe Operation so bezeichnet werden soll, als sollte mit d multiplicirt werden, so muß diejenige Größe, auf welche die Operation d angewendet, u giebt, nothwendig und ohne Wahl, wenn nicht geradezu Verwirrung entstehen soll, durch $\frac{1}{d}u$ bezeichnet werden; denn allein $\frac{1}{d}u$ mit d multiplicirt (wenn der Ausdruck erlaubt ist), keinesweges $\int u$, giebt u. Schon Johann Bernoulli schlug diese unstreitig richtige Bezeichnung vor, und vielleicht nur dadurch, daß man mit der Sache selbst einen nicht passenden Begriff verband, ist es erklärlich, daß man sich statt des richtigen und bequemen Zeichens eines unpassenden und unbequemen bediente. Denn so wie man unter d sich Differenzen denkt, so stellt man sich unter $\int$ Summen vor. Aber weder eins, noch das andere ist dasjenige, worauf es ankommt.

Zu der Beziehung auf einzelne Größen ist nun das richtige Zeichen völlig eben so bequem, wie das der directen Operation. Um nämlich die Umkehrung der Operation d auf u in Beziehung auf x anzuzeigen, darf man nur schreiben $\frac{x}{d}u$ eben wie man bei der directen Operation schrieb: $\frac{d}{x}u$. In dem obigen Beispiele des Inhalts eines Körpers heißt es jetzt $\frac{xy}{d^2}u$ und in diesem Ausdruck ist deutlich, und ohne daß eine weitere Erläuterung nöthig wäre, angezeigt, worauf es ankommt.

Was oben von dem Fall bemerkt worden, in welchem es nöthig ist, die Größen, auf welche man operiren will, in Klammern einzuschließen, gilt hier, wie dort.

157.

Die Umkehrung der Operation d pflegt man Integration zu nennen, ihr Resultat Integral, allein diese Benennung drückt wohl eben so wenig aus, was sie soll, als die Benennung Differential. Dieselbe geht von der Idee einer Summirung der Differentiale aus, die aber wirklich das Integral nicht giebt, weil das Differential nicht als ein Theil der Stammgröße betrachtet werden kann. Es scheint, man dürfe eben so wenig ein neues Wort für die umgekehrte Operation gebrauchen, als ein neues Zeichen. Die Benennung: Zurückleitung, im Gegensatz von Ableitung, oder kürzer Stammgröße, Urgröße und dergleichen, scheinen den wahren Begriff besser auszudrücken. Ich werde sie beibehalten, bis mir ein passenderes, grammatisch richtigeres Wort bekannt wird. Die Rechnung selbst würde ich: Rechnung mit veränderlichen Größen, und zwar die directe Rechnung, ableitende, die umgekehrte, zurückleitende nennen.

Wegen dessen, was sonst über die Zeichen und Benennungen zu erinnern nöthig seyn möchte, verweise ich auf meinen oben erwähnten „Versuch einer Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen", wo ein Theil der Einleitung diesem Gegenstande gewidmet ist.

158.

Was vorzüglich der Veränderung gebräuchlicher Zeichen entgegen zu stehen scheint, ist die Mühe der Gewöhnung an neue Zeichen, auch wohl die Macht der Gewohnheit selbst. Aber schwerlich darf jemals die Bequemlichkeit ein Grund seyn, an etwas Unrichtigem festzuhalten, und das Genauere zu verwerfen.

Sehr lange, ehe die arabischen Zifern bekannt waren, bediente man sich unbequemer Zahlzeichen. Würde man aber wohl jemals zu dem großen Nutzen der bessern Zeichen gelangt seyn, wenn man sie aus einem ähnlichen Grunde verworfen hätte?

Großen Schaden mag auch in der Differential- und Integral-Rechnung der Urheber selbst von dem berichtigten Begriffe über dieselbe dem Eingange richtigerer Zeichen und Namen dadurch gethan haben, daß unstreitig seine neuen Zeichen, wenn auch nicht unpassend, so doch noch viel unbequemer sind, als die alten, ja sogar zum Theil eben so unzulänglich, als diese. Denn bei der directen Operation reicht die Lagrangische Accentuation kaum mehr zu, wenn mehr als zwei unabhängig veränderliche Größen da sind, und für die umgekehrte Operation giebt sie die nothwendige Beziehung auf die einzelnen Größen eben so wenig deutlich an, wie das alte Zeichen. Diese Unvollkommenheit ist so gewiß, daß Lagrange sehr bald selbst sie eingesehen und in der zweiten Ausgabe der analytischen Mechanik sogar lieber zu den alten Zeichen zurückgekehrt ist. Werden nun immer wieder andere neue Zeichen vorgeschlagen, so erschwert dies allerdings den Eingang; allein billig sollte es denselben nicht hindern. Mag man wählen, welche Zeichen man will, die hiesigen oder andern. So viel ist gewiß, daß die alten unpassend, ungenau und unzulänglich sind, und daß richtigere Begriffe von der Sache selbst auch richtigere Zeichen bedürfen. Man kommt freilich auch mit den alten Zeichen fort, so lange man nur den Calcul mechanisch handhaben will, obgleich auch dieses in der Integral-Rechnung schwer ist, wo besonders noch bei weiterer Ausbildung und mehrerem Gebrauch die Unzulänglichkeit der Zeichen nothwendig fühlbar werden muß. Allein nachtheilig ist es der Klarheit der Einsicht und selbst der Richtigkeit und Zuverlässigkeit der Resultate zuverlässig immer, wenn man sich mit Zeichen und Namen forthelfen soll, welcher jeden Augenblick Begriffe erregen, die nicht zu dem Gegenstande gehören. Schon fängt man hin und wieder allmählig an, die Mängel zu fühlen, und es ist nicht zu bezweifeln, daß man auf irgend eine Weise auch allgemein die Nothwendigkeit einsehen werde, irgend andere angemessenere und brauchbarere Zeichen an die Stelle der alten zu setzen. Der Verfasser wiederholt, daß er weit entfernt ist, die von ihm gebrauchten Zeichen für die vollkommensten zu halten; allein das, glaubt er, lasse sich beweisen, daß die alten Zeichen unvollkommen sind und der Verbesserung bedürfen.

III. Ueber das System der Rechnung mit veränderlichen Größen.

159.

Das Nächste, was der Rechnung mit veränderlichen Größen außer der Berichtigung der Principien zu wünschen ist, möchte wohl eine genauere Ordnung im Vortrage seyn. Unstreitig läuft jetzt zuweilen das Fremdartigste fast ohne sichtbare Ordnung durcheinander. Es ist in der That sonderbar, daß derjenigen Wissenschaft, die der meisten Ordnung fähig zu seyn scheint, der Mathematik, noch so wenig Ordnung eigen ist. Gewöhnlich findet man den Vortrag der Rechnung mit veränderlichen Größen mit einer Einleitung angefangen, die einzelne algebraische Sätze enthält, und durch welche gleichsam das ungerechte Verschmähen einer Vereinigung mit der Algebra gebüßt wird. Darauf kommen einige Principien, nebst vielen Worten über das Unendliche, dann vielleicht einige Anwendungen, hierauf etwas aus der Geometrie, dann wieder Principien, dann wieder Geometrie, Anwendungen u. s. w. bis zu Ende.

Schwerlich gründet sich eine solche Mischung und z. B. die Einschaltung ganzer Abhandlungen über einzelne Gegenstände der Geometrie in ein Lehrbuch der Rechnung, auf etwas anders als Gewohnheit und Nachahmung der ersten Anfänge der Wissenschaft, welchen es wohl bequem seyn mochte, und auch gut geheißen werden mag, daß sie die nächsten Anwendungen der neuen Rechnung auf geometrische Gegenstände sogleich mit der Rechnung selbst vortrug. Aber wahrlich, mit eben dem Recht, wie man die Geometrie mit dem Calcul vereinigt, könnte man auch die Mechanik mit allen ihren Abtheilungen, und am Ende die Optik u. s. w. hinein bringen. Denn alle diese bedürfen der Rechnung mit veränderlichen Größen eben sowohl, als die Geometrie. Offenbar aber ist so Etwas einer wissenschaftlichen Ordnung zuwider.

Es ist zwar wahr, daß der Calcul zuweilen einzelne Formen, gleichsam als bildliche Vorstellungen analytischer Ausdrücke aus der Geometrie herzunehmen pflegt, z. B. die trigonometrischen Linien; allein, eines Theils sind diese Lehrsätze wahrschein-

lich sämmtlich nicht unbedingt nothwendig, und die Ausdrücke, welche sie geben, können auch ohne eigentlich geometrische Begriffe rein analytisch hergeleitet werden, wie solches z. B. Herr Professor Tralles hieselbst in den Abhandlungen der Berliner Academie aus den Jahren 1812 und 1813 von der trigonometrischen Linie gezeigt hat; andern Theils folgt daraus, daß die Rechnung aus der Geometrie Hülfssätze nimmt, selbst wenn es durchaus nothwendig wäre, nicht, daß deshalb die ganze oder halbe Geometrie in die Rechnung gehöre. In der That: so sehr die Geometrie der Rechnung bedarf, so wenig sollte die Rechnung der Geometrie bedürfen; denn der reinste Theil der Mathematik ist der Calcul: er ist reine Verstandes-Wissenschaft, gebaut auf bloße Vernunftschlüsse, völlig abstract und ohne alle sinnliche Wahrnehmung. Die nächste Anwendung von dergleichen Schlüssen ist die auf den Raum, und die demselben eigenthümlichen Sätze, woraus die Geometrie entsteht. Nimmt man den Begriff von Kraft hinzu, so entsteht die Mechanik. Niemals also kann der Calcul umgekehrt auf Geometrie gebauet werden, und jede Einmengung der Geometrie in den Calcul ist gewiß einer guten Ordnung zuwider. Weniger, aber doch auch noch einem guten Systeme zuwider ist, meines Erachtens, die Vermengung von Principien und Anwendungen. So trifft man z. B. die Untersuchung der größten und kleinsten oder der unbestimmt scheinenden Werthe zusammengesetzter Größen mitten unter den Principien an, die gleichwohl bloße Rechnungs-Exempel sind, und unter die große Zahl der Anwendungen gehören, denen die Principien der Rechnung innerhalb des Calculs selbst fähig sind. Meines Erachtens müßten bald nach den ersten Grundsätzen der Rechnung mit unbestimmten Zahlen, oder der Algebra, noch vor der allgemeinen Theorie der Gleichungen, die Principien des directen Theils der Rechnung mit veränderlichen Größen vorgetragen werden. Sie umfassen ungefähr dasjenige, was in dem ersten Theile meines oben erwähnten Versuches über die Rechnung mit veränderlichen Größen enthalten ist. Darauf möge der Rest der Principien der Algebra, und hierauf Anwendungen der vereinigten Principien der Algebra und des directen Theils der Rechnung mit veränderlichen Größen

folgen, worunter die allgemeine Theorie der Gleichungen, die Entwickelung oder die Summirung der Reihen, die Untersuchung größter und kleinster oder unbestimmt scheinender Werthe zusammengesetzter Größen u. s. w. gehören. Hierauf könnten die Principien der umgekehrten oder zurückleitenden Rechnung folgen, wenn es nicht etwa noch besser ist, dieselbe ebenfalls den Anwendungen vorher gehen zu lassen. Darauf möge die zurückleitende Rechnung ausgeführt werden, und abermalige Anwendungen, die Reihen, die Interpolation, die Differenzen, die Wahrscheinlichkeit u. s. w. betreffend, den Beschluß machen. Alle geometrische Sätze ohne Ausnahme müßten aber, meines Erachtens, durchaus ganz von dem Calcul abgesondert bleiben. Denn die Sätze von der Berührung, von der Quadratur, Cubatur, von der Rectification u. s. w., die gewöhnlich mit dem Calcul vermengt werden, machen zusammen gerade das aus, was man, freilich wieder mit Unrecht, höhere Geometrie nennt. Sie bilden von der Geometrie, für deren ersten Theil die Lehre von den geraden Linien und Ebenen zu gehören scheint, den zweiten Theil, der von den krummen Linien und krummen Flächen handelt.

Wohl wäre ein, ungefähr so geordnetes Lehrbuch, wovon viele vorhandene noch ziemlich weit abweichen, sehr zu wünschen. Ist gleich die Unternehmung ungeheuer groß, so würde dennoch der Nutzen noch größer seyn, denn nur erst dann läßt sich eine Habe schnell vergrößern, wenn sie geordnet und ihr Umfang genau erkannt ist.

IV. Ueber die Entwickelung der ersten Ableitung zusammengesetzter Größen von bestimmten Formen.

160.

In der allgemeinen Entwickelung von

$$f(x+k) = p + qk + rk^2 + sk^3 \ldots\ldots$$

war $p = fx$; $q = d'fx$ war der Coefficient zu k in der Ent-

wickelung von $p = fx$, wenn man darin $x + k$ statt x setzt, $r = \frac{d^2 fx}{2}$ der halbe Coefficient zu k in der Entwickelung von $q = dfx$, wenn man darin $x + k$ statt x setzt, $s = \frac{d^3 fx}{2 \cdot 3}$ war ein Drittheil des Coefficienten zu k in der Entwickelung von $r = \frac{d^2 fx}{2}$, wenn man darin $x + k$ statt x setzt u. s. w. Alle Coefficienten waren erste Coefficienten einer neuen ähnlichen Entwickelung, also kommt es allemal nur auf den ersten Coefficienten einer Entwickelung oder auf den Coefficienten zu k an. Da die allgemeine Entwickelung denselben unbestimmt läßt, so muß sich die Regel, nach welcher er von der Stammgröße abhängt, nothwendig nach der Form ihrer Zusammensetzung, oder nach ihren algebraischen Eigenschaften richten, und für verschiedene Zusammensetzungs-Formen der Stammgrößen auch verschieden seyn.

161.

Bringt man den allgemeinen Ausdruck

$$f(x+k) = fx + k, \ dfx + \frac{k^2}{2} d^2 fx \ldots\ldots$$

auf die Gestalt

$$\frac{f(x+k) - fx}{k} = dfx + \frac{k}{2} d^2 fx + \frac{k^2}{2 \cdot 3} d^3 fx \ldots\ldots,$$

so folgt, daß

$$dfx = \frac{f(x+k) - fx}{k} \text{ für } k = 0 \text{ sey.}$$

Man darf also nur für die verschiedenen Zusammensetzungs-Formen von fx, diese Größe unverwandelt, von $f(x+k)$ abziehen, den Rest durch k dividiren und in den Quotienten $k = 0$ setzen, so findet man den verlangten Coefficienten zu k für eine beliebige Zusammensetzungs-Form f der Größe fx.

Die bekanntesten einfachen Zusammensetzungs-Formen von Größen sind Potenzen, Exponential-Größen, Logarithmen, tri-

gonometrische Linien und Kreisbogen. Ich habe zwar schon in meinem oben erwähnten Versuche eine Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen, in der fünften Abtheilung der ableitenden Rechnung, die Entwickelung der ersten Ableitung dieser Größen abgehandelt, allein sie ist noch leichter und einfacher möglich. Diese einfachere Art will ich hier mittheilen.

Ableitung von Potenzen.

162.

Wenn $fx = x^m$, so ist $f(x+k) = (x+k)^m$, also ist

$$dfx = \frac{(x+k)^m - x^m}{k} \text{ für } k = 0.$$

Es sey $k = px$, so ist $p = 0$ für $k = 0$ und

$$dfx = \frac{(x+px)^m - x^m}{px} = x^{m-1} . \frac{(1+p)^m - 1}{p} \text{ für } p = 0.$$

Die Größe $\frac{(1+p)^m - 1}{p}$ enthält nur p und m, also für $p = 0$ nur noch m. Mithin kann man ihren Werth für $p = 0$ durch φm bezeichnen, so daß dfx oder $d(x^m) = \varphi m . x^{m-1}$. Also wird auch seyn

$$d(x^n) = \varphi n x^{n-1} \text{ und}$$

$$d(x^{m+n}) = \varphi(m+n) x^{m+n-1}, \text{ folglich}$$

$$(x+k)^m = x^m + \varphi m x^{m-1} \ldots\ldots$$

$$(x+k)^n = x^n + \varphi n x^{n-1} \ldots\ldots\ldots$$

$$(x+k)^{m+n} = x^{m+n} + \varphi(m+n) x^{m+n-1} \ldots\ldots$$

Nun ist $x^m . x^n = x^{m+n}$, also

$$(x^m + \varphi m x^{m-1} \ldots)(x^n + \varphi n x^{n-1} \ldots) = x^{m+n} + \varphi(m+n) x^{m+n-1} \ldots \text{ oder}$$

$$x^{m+n} + \varphi n x^{m+n-1} + \varphi m x^{m+n-1} \ldots\ldots = x^{m+n} + \varphi(m+n) x^{m+n-1} \ldots\ldots$$

Weil die Coefficienten zu gleichen Potenzen von x gleich seyn müssen, so folgt hieraus

$$\varphi m + \varphi n = \varphi(m+n),$$

oder wenn $m = n$

$$2\varphi m = \varphi(2m)$$

Man setze

$$\varphi(m+n) = \varphi n + Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots,$$

wo N, N′, N″ unbestimmte Coefficienten sind, so ist auch, weil $\varphi(m+n) = \varphi m + \varphi n$ war,

$$\varphi m + \varphi n = \varphi n + Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots,$$

folglich $\varphi m = Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots,$

und daraus $\varphi(2m) = 2Nm + 4N'm^2 + 8N''m^3 \ldots.$

Da nun $\varphi(2m) = 2\varphi m$ war, so ist

$$2(Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots) = 2Nm + 4N'm^2 + 8N''m^3 \ldots$$

folglich

$$2N'm^2 + 6N''m^3 + 14N'''m^4 \ldots = 0$$

woraus folgt $N' = 0$, $N'' = 0$, $N''' = 0$ ꝛc.,

also, weil $\varphi n = Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots$ war,

$$\varphi m = Nm,$$

also $d(x^m) = Nmx^{m-1}$, und folglich, weil allgemein

$$f(x+k) = fx + kdfx + \frac{k^2}{2} d^2fx \ldots \text{ ist,}$$

$$(x+k)^m = x^m + Nmkx^{m-1} + \frac{k^2}{2} d^2(x^m) \ldots$$

Dieser Ausdruck gilt für jedes beliebige m, also auch für $m=1$, also muß auch seyn

$$(x+k)' = x + Nkx^0 + \frac{k^2}{2} d^2(x^m) \ldots \text{ oder}$$

$$x + k = x + Nk + \frac{k^2}{2} d^2(x^m) \ldots,$$

woraus folgt $N=1$, $d^2(x^m)=0$, $d^3(x^m)=0$ ꝛc.; also, weil $d(x^m)=Nmx^{m-1}$ war.

$$272.\quad d(x^m)=mx^{m-1},$$

welcher der verlangte Ausdruck der ersten Ableitung einer Potenz für jeden beliebigen Exponenten ist. Da die Ableitungs-Methode unmittelbar die ganze Entwickelung von $f(x+k)$ giebt, so giebt sie auch die völlige Entwickelung von $(x+k)^m$ für jedes beliebige m. Denn da nunmehr $d^2(x^m)=d(d(x^m))$ $=d(mx^{m-1})=m.\overline{m-1}x^{m-1}$, $d^3x^m=d(d^2(x^m))$ $=(m.\overline{m-1}x^{m-1})=m.\overline{m-1}.\overline{m-2}x^{m-1}$ u. s. w., allgemein aber

$$f(x+k)=fx+kdfx+\frac{k^2}{2}d^2fx\ldots\ldots \text{ ist, so ist}$$

$$273.\quad (x+k)^m=x^m+mx^{m-1}k+\frac{m.\overline{m-1}}{2}x^{m-2}k^2\ldots,$$

welches der binomische Lehrsatz ist. Die Ableitung wurde ganz allgemein für jeden beliebigen Werth von m gefunden, also liegt in dem Vorhergehenden zugleich der allgemeinste strenge Beweis des binomischen Lehrsatzes für jeden beliebigen Exponenten ohne alle Einschränkung.

Ableitung von Exponential-Größen.

163.

Wenn $fx=\varepsilon^x$, so ist $f(x+k)=\varepsilon^{x+k}=\varepsilon^x\varepsilon^k$, also ist $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ oder dfx oder

$$d\varepsilon^x=\frac{\varepsilon^x\varepsilon^k-\varepsilon^x}{k}=\varepsilon^x.\frac{\varepsilon^k-1}{k} \text{ für } k=0.$$

Es sey $\varepsilon=1+p$, so ist nach dem binomischen Lehrsatze (273.)

$$\varepsilon^k=(1+p)^k=1+kp+\frac{k.\overline{k-1}}{2}p^2\ldots, \text{ also}$$

$$\frac{\varepsilon^k-1}{k}=p+\frac{k-1}{2}p^2+\frac{\overline{k-1}.\overline{k-2}}{2.3}p^3\ldots., \text{ also}$$

$$d\varepsilon^x = \varepsilon^x\left(p + \frac{k-1}{2}p^2 + \frac{k-1.k-2}{2.3}p^3 \ldots\right)$$

für $k=0$, folglich

$$d\varepsilon^x = \varepsilon^x(p - \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{3}p^3 - \tfrac{1}{4}p^4 \ldots)$$

oder weil $p = \varepsilon - 1$ war,

274. $d\varepsilon^x = \varepsilon^x(\varepsilon - 1 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(\varepsilon - 1)^3 \ldots)$,

welches die gesuchte erste Ableitung der Exponential-Größe ε^x ist. Will man den Coefficienten

275. $\varepsilon - 1 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(\varepsilon - 1)^3 \ldots$ gleich α setzen, so ist

276. $d\varepsilon^x = \alpha\varepsilon^x$.

Hierdurch kann man nun wieder, wenn man will, auf der Stelle ε^{x+k} oder ε^x entwickeln. Denn da $d\varepsilon^x = \alpha\varepsilon^x$, so ist $d^2\varepsilon^x = a^2\varepsilon^x$, $d^3\varepsilon^x = \alpha^3\varepsilon^x$ ꝛc.; also, weil $f(x+k) = fx + k\,dfx + \frac{k^2}{2}d^2fx \ldots$ oder hier $\varepsilon^{x+k} = \varepsilon^x + k\,d\varepsilon^x + \frac{k^2}{2}d^2\varepsilon^x \ldots$ ist,

$$\varepsilon^{x+k} = \varepsilon^x\left(1 + k\alpha + \frac{k^2\alpha^2}{2} + \frac{k^3\alpha^3}{2.3} \ldots\right).$$

Setzt man $x=0$, $k=x$, so kommt

277. $$\varepsilon^x = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{2.3} \ldots$$

Giebt man der Größe $\alpha = \varepsilon - 1 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - 1)^2 \ldots$, die willkürlich ist, weil es ε ist, den Werth 1, so muß sich ε darnach richten. Man findet den Werth von ε für $\alpha = 1$ unmittelbar aus dem vorigen Ausdruck von ε^x. Denn man setze $x=1$, so kommt, weil $\alpha = 1$ seyn soll,

$$\varepsilon = 2 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \ldots$$

Dieses macht, wenn man die Brüche zusammenzieht und den Werth von ε für diesen Fall zur Unterscheidung e nennt,

278. $e = 2{,}718281828459 \ldots$

Für diesen besondern Werth e von ε ist dann

279. $de^x = e^x$ und

280. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \ldots\ldots$

Ableitung von Logarithmen.

164.

Es sey $fx = \log. x$ für die Basis ε, welches durch $fx = \overset{\varepsilon}{\log} x$ mag angezeigt werden, denn der Ausdruck log ohne Beisatz ist unbestimmt, weil es unzählige Logarithmen von einer und derselben Zahl giebt, nämlich für jede beliebige Basis einen, weshalb man auch nie unterlassen sollte, die Basis dabei zu bemerken, etwa wie oben.

Nun ist hier $f(x + k) = \log(x + k) = \overset{\varepsilon}{\log} x + \overset{\varepsilon}{\log}\left(\frac{x+k}{x}\right)$ $= \overset{\varepsilon}{\log} x + \overset{\varepsilon}{\log}\left(1 + \frac{k}{x}\right)$, also ist hier

$$\frac{f(x - k) - fx}{k} = \frac{\overset{\varepsilon}{\log}\left(1 + \frac{k}{x}\right)}{k}.$$ Es sey $k = mx$,

so ist $\frac{\overset{\varepsilon}{\log}\left(1 + \frac{k}{x}\right)}{k} = \frac{\overset{\varepsilon}{\log}(1 + m)}{mx}$, und folglich

$$d \overset{\varepsilon}{\log} x = \frac{\overset{\varepsilon}{\log}(1 + m)}{m} \cdot \frac{1}{x} \text{ für } m = 0.$$

Nun war (277.) $\varepsilon^x = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} \ldots\ldots$ Nimmt man hiervon auf beiden Seiten die Logarithmen für die Basis ε, so kommt

$$x = \overset{\varepsilon}{\log}\left(1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} \ldots\right),$$

weil der Logarithme von ε^x für die Basis ε, $= x$ ist. Man setze $\alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} \ldots = m$, so ist

$$x = \overset{\varepsilon}{\log}(1 + m), \text{ also } \frac{\overset{\varepsilon}{\log}(1+m)}{m} = \frac{x}{\alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

oder $\frac{\overset{\varepsilon}{\log}(1+m)}{m} = \frac{1}{\alpha + \frac{\alpha^2 x}{2} + \frac{\alpha^3 x^2}{2 \cdot 3} \ldots}$

Wenn hier $x = 0$, so ist auch $m = 0$, also erhält man den Werth von $\frac{\overset{\varepsilon}{\log}(1+m)}{m}$ für $m = 0$, wenn man in dem letzten Ausdruck $x = 0$ setzt. Dieses giebt den Werth von $\frac{\overset{\varepsilon}{\log}(1+m)}{m}$ $= \frac{1}{\alpha}$ für $m = 0$, folglich ist eben

$$281. \quad d\overset{\varepsilon}{\log} x = \frac{1}{\alpha x}$$

wo gemäß (275.)

$$\alpha = \varepsilon - 1 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(\varepsilon - 1)^3 \ldots \text{ ist.}$$

Für den besondern Werth e der Basis ε ist $\alpha = 1$, also für die Basis $e = 2{,}718 \ldots$

$$282. \quad d\overset{e}{\log} x = \frac{1}{x}.$$

165.

Man kann diese Ableitung der Logarithmen auch aus der Ableitung einer Exponential-Größe finden. Der Logarithme

einer Zahl nämlich ist, nach dem allgemeinsten und einfachsten Begriff, der Exponent derjenigen von einer beliebigen, jedoch für alle gegebene Zahlen unveränderlich dieselbe bleibende Zahl, genommenen Potenz, welche der gegebenen Zahl gleich ist. So ist in der Gleichung $\varepsilon^x = y$, x der Logarithme der Zahl y für die Basis ε. Aus dieser Gleichung nun folgt, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen für die Basis ε nimmt, $x = \overset{\varepsilon}{\log}\, y$. Nun lehren die Principien der Ableitungs-Rechnung, daß wenn y eine von x abhängende Größe ist, allgemein $\frac{d}{x} fy = \frac{d}{y} fy \frac{d}{x} y$ ist. Also ist hier, wenn man von der Gleichung $x = \overset{\varepsilon}{\log}\, y$ die Ableitung nach x nimmt, weil solche von x selbst $= 1$ ist,

$$1 = \frac{d}{y} \overset{\varepsilon}{\log}\, y \frac{d}{x} y \text{ und daraus}$$

$$\frac{1}{\frac{d}{x} y} = \frac{d}{y} \overset{\varepsilon}{\log}\, y.$$

Es war aber $\frac{d}{x} y$, welches $\frac{d}{x} \varepsilon$ ist $= \alpha \varepsilon^x = \alpha y$ (276.), also ist $\frac{d}{y} \overset{\varepsilon}{\log}\, y = \frac{1}{\alpha y}$, also auch $\frac{d}{x} \overset{\varepsilon}{\log}\, x = \frac{1}{\alpha x}$ oder

$$d \overset{\varepsilon}{\log}\, x = \frac{1}{\alpha x} \text{ wie oben (276.).}$$

166.

Wie immer, hat man auch hier durch die erste Ableitung ohne Weiteres die Entwickelung der gegebenen Größe selbst, denn aus $d \overset{\varepsilon}{\log}\, x = \frac{1}{\alpha x}$ folgt $d^2 \overset{\varepsilon}{\log}\, x = - \frac{1}{\alpha x^2}$ (272.) $d^3 \overset{\varepsilon}{\log}\, x = + \frac{2}{\alpha x^3}$, $d^4 \overset{\varepsilon}{\log}\, x = - \frac{2 \cdot 3}{\alpha x^4}, \ldots$

also, weil $f(x+k) = fx + k\,d\,fx + \frac{k^2}{2} d^2 fx \ldots$

oder hier $\overset{\varepsilon}{\log}(x+k) = \overset{\varepsilon}{\log} x + k\,d\,\overset{\varepsilon}{\log} x + \frac{k^2}{2} d^2 \overset{\varepsilon}{\log}.\, x \ldots$ ist,

$$\overset{\varepsilon}{\log}(x+k) = \overset{\varepsilon}{\log} x + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{k}{x} - \frac{k^2}{2x^2} + \frac{k^3}{3x^3} - \frac{k^4}{4x^4} \ldots\right)$$

Man setze $x = 1$ und $k = x$, so kommt, weil $\overset{\varepsilon}{\log} 1 = 0$

$$283. \quad \overset{\varepsilon}{\log}(1+x) = \frac{1}{\alpha}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\right)$$

Für den besondern Fall, daß $\alpha = 1$, $\varepsilon = e$ ist,

$$284. \quad \overset{e}{\log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$$

Man nennt bekanntlich die Logarithmen, für welche $\alpha = 1$ oder die Basis $= e = 2{,}718 \ldots$ ist, natürliche Logarithmen. $\frac{1}{\alpha}$ ist der Modul für die Basis ε, der also nach (275.) allgemein

$$285. \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\varepsilon - 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon-1)^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon-1)^3 \ldots} \text{ ist.}$$

167.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch folgende Entwickelung der Logarithmen mittheilen, die nicht von den Ableitungen abhängt. Es sey wie oben

$$\varepsilon^x = y$$

so ist x der Logarithme von y für die Basis ε. Für ein beliebiges m ist $\varepsilon^{xm} = y^m$. Es sey $y^m = 1 + p$, $\varepsilon^m = 1 + q$, so ist

$(1+q)^x = 1 + p$, oder nach dem binomischen Lehrsatz

$$1 + xq + \frac{x.x-1}{2} q^2 + \frac{x.x-1.x-2}{2.3} q^3 \ldots = 1 + p,$$

woraus folgt $\frac{p}{q} = x + \frac{x.x-1.}{2} q + \frac{x.x-1.x-2}{2.3} q^2 \ldots$

Nun ist $p = y^m - 1$, $q = \varepsilon^m - 1$. Also ist

$$\frac{y^m-1}{\varepsilon^m-1} = x + \frac{x.x-1}{2} q + \frac{x.x-1.x-2}{2.3} q^2 \ldots$$

In dieser Gleichung setze man das willkürliche $m=0$, so ist $\varepsilon^m = 1$, also $1 = 1 + q$, folglich $q = 0$, und mithin für $m = 0$

$\frac{y^m-1}{\varepsilon^m-1} = x$. Aber x war $= \overset{\varepsilon}{\log} y$, also ist

$$286. \quad \overset{\varepsilon}{\log} y = \frac{y^m-1}{\varepsilon^m-1} \text{ für } m=0.$$

Dieser Ausdruck eines Logarithmen und die Art ihn herzuleiten ist nicht sehr bekannt. Derselbe giebt folgende sonderbare Berechnungs-Regel eines Logarithmen. Man ziehe z. B. aus der gegebenen Zahl y recht oft wiederholt die Quadrat-Wurzel, aus der Basis ε auch, nehme von beiden Resultaten 1 weg und dividire die Reste in einander, so ist der Quotient der Logarithme der gegebenen Zahl für die Basis ε.

Setzt man in diesem Ausdruck $y = 1 + x$ und $\varepsilon = 1 + p$, so ist $y^m = 1 + mx + \frac{m.m-1}{2} x^2$

$$\varepsilon^m = 1 + mp + \frac{m.m-1}{2} p^2, \text{ also}$$

$$\overset{\varepsilon}{\log}(1+x) = \frac{x + \frac{m-1}{2} x^2 + \frac{m-1.m-2}{2.3} x^3 \ldots}{p + \frac{m-1}{2} p^2 + \frac{m-1.m-2}{2.3} p^3 \ldots}$$

worin $m = 0$ gesetzt werden muß. Also ist

$$\overset{\varepsilon}{\log}(1+x) = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \ldots}{p - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 \ldots},$$

oder weil $p = \varepsilon - 1$,

$$\overset{\varepsilon}{\log}(1+x)=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\ldots\ldots}{\varepsilon-1-\frac{1}{2}(\varepsilon-1)^2+\frac{1}{3}(\varepsilon-1)^3\ldots}=\frac{1}{\alpha}(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\ldots)$$

welches die vollständige Entwickelung der Logarithmen ist (283.).

Da $1+x=y$ war, so ist auch

$$\overset{\varepsilon}{\log}\ y=\frac{1}{\alpha}(y-1-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3\ldots)$$

folglich auch $\overset{\varepsilon}{\log}.\,y^m$ oder

$$m\overset{\varepsilon}{\log}y=\frac{1}{\alpha}(y^m-1)(1-\frac{1}{2}(y^m-1)+\frac{1}{3}(y^m-1)^2\ldots.)$$

Setzt man $m=0$, so sind die auf 1 folgenden Glieder in dem zweiten Factor rechter Hand $=0$, denn y^0 ist $=1$. Also ist $m\overset{\varepsilon}{\log}\ y=\frac{1}{\alpha}(y^m-1)$. Aber α ist $=\frac{\varepsilon^m-1}{m}$ für $m=0$, wie aus dem Obigen folgt, also ist

$$m\overset{\varepsilon}{\log}y=\frac{m(y^m-1)}{\varepsilon^m-1}\text{ oder }\overset{\varepsilon}{\log}\ y=\frac{y^m-1}{\varepsilon^m-1}.$$

So kommt man rückwärts wieder auf den ersten Ausdruck. Man kann aus demselben auch schließen

$$d\overset{\varepsilon}{\log}y=\frac{m\,y^{m-1}}{\varepsilon^m-1}\text{ oder weil }m=0\text{ ist}$$

$$d\overset{\varepsilon}{\log}y=\frac{m}{\varepsilon^m-1}\cdot\frac{1}{y},$$

also $d\overset{\varepsilon}{\log}y=\frac{1}{\alpha y}$, wie (281.)

Da der Ausdruck $\overset{\varepsilon}{\log}y=\frac{y^m-1}{\varepsilon^m-1}$ ganz selbstständig a priori entwickelt ist, so bietet auch er ein Mittel dar, die Ableitung der Logarithmen zu finden.

168.

Folgendes ist ebenfalls merkwürdig.

Es ist nämlich zufolge (272.) $d\,x^m = m\,x^{m-1}$,

also $d\,x^{m+1} = (m+1)\,x^m$ oder $x^m = \frac{d\,x^{m+1}}{m+1}$,

also umgekehrt $\frac{1}{d}\,x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + A$, wenn A die beständige Größe bedeutet, die möglicherweise deshalb hinzukommen kann, weil $d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + A\right)$ und $d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)$, beides $= x^m$ ist. Die Größe $\frac{1}{d}\,x^m$ wird allemal für irgend einen Werth von x, $= 0$ seyn müssen, denn dieses ist nothwendig für jede beliebige Größe der Fall. Der Werth von x, für welchen $\frac{1}{d}\,x^m = 0$ ist, heiße a, so ist

$$0 = \frac{a^{m+1}}{m+1} + A, \text{ also}$$

$$A = -\frac{a^{m+1}}{m+1}, \text{ und folglich vollständig}$$

$$287.\quad \frac{1}{d}\,x^m = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Dieser Ausdruck gilt aber ohne alle Einschränkung für jedes m, also auch für $m = -1$, folglich ist in diesem Falle, wenn man $m + 1 = n$ setzt oder

$$\frac{1}{d}\,x^m = \frac{x^n - a^n}{n}$$

macht $\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^0 - a^0}{0}$ oder wenn man noch auf beiden Seiten mit α dividirt $\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\alpha x}\right) = \frac{x^n - a^n}{n\alpha}$, welches eine unbestimmte Größe ist. Nun ist aber zufolge (281.) $\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\alpha x}\right) = \overset{\varepsilon}{\log} x$, also ist

$$\overset{\varepsilon}{\log} x = \frac{x^n - a^n}{n\alpha} \text{ für } n = 0.$$

Die Größe a war diejenige, für welche $\frac{1}{2}x^m = 0$ ist. Es ist also $a = 1$, denn von 1 ist der Logarithme $= 0$, also ist

$$\overset{\varepsilon}{\log} x = \frac{x^n - 1}{n\alpha} \text{ für } n = 0.$$

Für $x = \varepsilon$ ist $\overset{\varepsilon}{\log} x = 1$, also ist

$$1 = \frac{\varepsilon^n - 1}{n\alpha}, \text{ folglich } n\alpha = \varepsilon^n - 1, \text{ mithin}$$

$$\overset{\varepsilon}{\log} x = \frac{x^n - 1}{\varepsilon^n - 1} \text{ für } n = 0, \text{ wie (286.)}$$

Der Ausdruck $\frac{1}{d} x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ leidet also wirklich keine Einschränkung. Er ist nur für den Fall $m = -1$ unbestimmt, und bedeutet in demselben den Logarithmen, der allerdings als eine Potenz betrachtet werden kann, nämlich als eine solche, deren Exponent 0 ist, jedoch mit Beifügung der nöthigen Constante.

Ableitung trigonometrischer Linien.

169.

Mit der gewöhnlichen Hülfe geometrischer Begriffe läßt sich diese Ableitung sehr einfach, wie folgt, finden. Man darf nur die Ableitung einer solchen Linie suchen, weil sie alle von einander abhängen. Auch ist es gleichgültig, welcher. Es sey also $fx = \sin. x$, so ist $f(x+k) = \sin. (x+k) = \sin. x \cos. k + \cos. x \sin. k$, also giebt $dfx = \frac{f(x+k) - fx}{k}$ für $k = 0$ hier

$$d \sin. x = \frac{\sin. x \cos. k + \cos. x \sin. k - \sin. x}{k}$$

$$= \frac{\sin. x (\cos. k - 1) + \cos. x \sin. k}{k}$$

$$=\frac{2\cos.x\sin.k\cos.\tfrac{1}{2}k-2\sin.x\sin.\tfrac{1}{2}k^2}{k}$$

$$=\frac{2\sin.\tfrac{1}{2}k(\cos.x\cos.\tfrac{1}{2}k-\sin.x\sin.\tfrac{1}{2}k)}{k}$$

für $k=0$. Es ist aber $\sin.k=0$ für $k=0$, also ist

$$d\sin.x=\frac{2\sin.\tfrac{1}{2}k\cos.x\cos.\tfrac{1}{2}k}{k}=\frac{\sin.k\cos.x}{k}$$

für $k=0$.

Nun ist für jeden Winkel, der kleiner als ein rechter ist, der Bogen kleiner als die Tangente, und größer als der Sinus. Also ist für jedes k, das kleiner als ρ ist, $k>\sin.k$ und $k<\text{tang}.k$ oder $\frac{\sin.k}{k}<1$ und $\frac{\text{tang}.k}{k}>1$. Das letzte giebt $\frac{\sin.k}{k.\cos.k}>1$ oder $\frac{\sin.k}{k}>\cos.k$. Es war aber auch $\frac{\sin.k}{k}<1$, folglich ist der Werth des Quotienten $\frac{\sin.k}{k}$ für jeden Winkel zwischen 0 und ρ, zwischen 1 und $\cos.k$ eingeschlossen. Für $k=0$ aber fallen 1 und $\cos.k$ zusammen, also ist nothwendig $\frac{\sin.k}{k}=1$ für $k=0$, folglich

288. $d\sin.x=\cos.x$,

welches die erste Ableitung von $\sin.x$ ist.

170.

Die Ableitung der übrigen trigonometrischen Linien findet man nunmehr blos aus ihrer Abhängigkeit von einander. Es ist z. B.

$\sin.x^2+\cos.x^2=1$, also wenn man die erste Ableitung nimmt,

$$2\sin.x\,d\sin.x+2\cos.x\,d\cos.x=0,$$

oder weil $d\sin.x=\cos.x$ war, $\sin.x\cos.x+\cos.x\,d\cos.x=0$ oder $\sin.x+d\cos.x=0$ und daraus

289. $d\cos.x=-\sin.x$,

welches die erste Ableitung des Cosinus ist. Es ist ferner $\text{tang.}\,x = \frac{\sin.\,x}{\cos.\,x}$, also

$$d\,\text{tang.}\,x = \frac{d\sin.\,x}{\cos.\,x} - \frac{\sin.\,x\,d\cos.\,x}{\cos.\,x^2},$$

und wenn man die obigen Werthe von $d\sin.\,x$ und $d\cos.\,x$ substituirt,

$$d\,\text{tang.}\,x = 1 + \frac{\sin.\,x^2}{\cos.\,x^2} = 1 + \text{tang.}\,x^2, \text{ also}$$

$$290. \quad d\,\text{tang.}\,x = \sec.\,x^2.$$

Aus $\cot.\,x = \frac{1}{\text{tang.}\,x}$ folgt $d\cot.\,x = -\frac{d\,\text{tang.}\,x}{\text{tang.}\,x^2}$ also

$$d\cot.\,x = -\frac{\sec.\,x^2}{\text{tang.}\,x^2} = -\frac{1}{\cos.\,x^2}\cdot\frac{\cos.\,x^2}{\sin.\,x^2}, \text{ also}$$

$$291. \quad d\cot.\,x = -\text{cosec.}\,x^2.$$

Aus $\sec.\,x = \frac{1}{\cos.\,x}$ folgt $d\sec.\,x = -\frac{d\cos.\,x}{\cos.\,x^2} = \frac{\sin.\,x}{\cos.\,x^2}$, also

$$292. \quad d\sec.\,x = \text{tang.}\,x\sec.\,x.$$

Aus $\text{cosec.}\,x = \frac{1}{\sin.\,x}$ folgt $d\,\text{cosec.}\,x = -\frac{d\sin.\,x}{\sin.\,x^2} = -\frac{\cos.\,x}{\sin.\,x^2}$, also

$$293. \quad d\,\text{cosec.}\,x = -\cot.\,x\,\text{cosec.}\,x.$$

Ableitung von Kreisbogen.

171.

Wenn $fx = \sin.\,x$, so war $dfx = \cos.\,x$. Es sey $fx = \sin.\,x = z$ und $x = \varphi z$, so wird jetzt $\frac{d}{z}\varphi z$ oder $\frac{d}{z}x$ verlangt. Es ist allgemein $\frac{d}{z}x\frac{d}{x}z = 1$, also $\frac{d}{z}x = \frac{1}{\frac{d}{x}z}$. Aber $\frac{d}{x}z$

ist die Ableitung des Sinus z nach x, welche cos. x ist; also ist $\frac{d}{z}x$ oder

$$294. \quad d\,\text{arc. sin. } x = \frac{1}{\cos. x} = \sec. x.$$

Eben so ist aus dem allgemeinen Ausdruck $\frac{d}{z}x = \frac{1}{\frac{d}{x}z}$, wenn $z = \cos. x$, $d\,\text{arc cos. } x = \frac{1}{-\sin. x}$ oder

$$295. \quad d\,\text{arc. cos. } x = -\text{cosec. } x.$$

Ferner, wenn $z = \text{tang. } x$, $d\,\text{arc. tang. } x = \frac{1}{\sec. x^2}$ oder

$$296. \quad d\,\text{arc. tang. } x = \cos. x^2.$$

Wenn $z = \cot. x$, $d\,\text{arc. cot. } x = \frac{1}{-\text{cosec. } x^2}$ oder

$$297. \quad d\,\text{arc. cot. } x = -\sin. x^2,$$

wenn $z = \sec. x$, $d\,\text{arc. sec. } x = \frac{1}{\text{tang. } x \sec. x}$ oder

$$298. \quad d\,\text{arc. sec. } x = \cot. x\,\text{cosec. } x,$$

wenn $z = \text{cosec. } x$, $d\,\text{arc. cosec. } x = \frac{1}{-\cot. x\,\text{cosec. } x}$ oder

$$299. \quad d\,\text{arc. cosec. } x = -\text{tang. } x \sec. x.$$

Ueber die Entwickelung der Ausdrücke für die trigonometrischen Linien und Kreisbogen vermittelst ihrer Ableitungen gedenke ich ein andermal Einiges zu bemerken.

8.

Ueber die Zurückleitung oder Integration beliebiger entwickelt gegebener, von einer veränderlichen Größe abhängender Functionen.

172.

Bekanntlich ist die zurückleitende oder Integral-Rechnung noch sehr unvollkommen. Die einfachste Aufgabe ist: zu einer entwickelt gegebenen, nur aus einer unabhängig veränderlichen Größe zusammengesetzten Ableitung erster Ordnung, wie dfx, die Stammgröße zu finden, denn die Ableitung kann von einer höhern Ordnung seyn, oder sie kann unentwickelt, das heißt, in einer Gleichung mit Ableitungen oder unbekannten Stammgrößen von verschiedenen Ordnungen verbunden seyn, z. B. wie $\varphi(y, dy, d^2y\ldots)=0$, wenn $fx=y$, oder es können mehrere veränderliche Größen und mehr oder weniger Bedingungs-Gleichungen dafür gegeben seyn u. s. w., welche Aufgaben alle verwickelter sind, und von welchen man die Auflösung kaum in wenigen einzelnen Fällen kennt. Aber selbst von jener einfachen Aufgabe ist die Auflösung in endlichen Ausdrücken bekanntlich bis jetzt nur in wenigen Fällen möglich. Enthält dfx Wurzel-Größen oder Logarithmen u. dgl., so ist man mit den Mitteln zur Auflösung bald am Ende, z. B. $fx=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\log. x}\right)$ oder $fx=\frac{1}{d}\left(\frac{e^x}{x}\right)$ giebt den Integral-Logarithmen $dfx=\frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}$ giebt elliptische Funktionen, die alle noch ziemlich problematisch

sind. Viel über die Ausdrücke hinaus, deren Stammgrößen Kreis-Funktionen, Logarithmen oder Potenzen enthalten, erstreckt sich bis jetzt die Kunst, endliche Ausdrücke für die Stammgrößen zu finden, nicht.

Daher bleibt in den meisten Fällen nichts übrig, als den Werth der Stammgrößen durch Näherung zu suchen, welches entweder durch Reihen geschehen kann, die sich dem wahren Werthe der Stammgrößen ohne Ende nähern, oder durch andere, theils endliche, theils unendlich fortlaufende Ausdrücke, die irgend etwas Anderes, willkürlich gewähltes genau ausdrücken, dessen Werth, seiner Natur nach, dem Werthe der Stammgröße, die man sucht, nahe kommt.

Besonders in der neuern Zeit ist dieser Gegenstand viel bearbeitet worden, und es sind theils neue Methoden vorgeschlagen, theils die ältern mit gutem Erfolge weiter entwickelt worden. Unter die Bemühungen um diese Aufgabe gehören die von Legendre in den exercices de calcul integral, von Kramp, Servois, Bérard in den Annales de mathematiques, von Gauß in den neuern Abhandlungen der Göttinger Universität und anderen.

Unstreitig ist dieser Gegenstand für die gesammte Mathematik von der höchsten Wichtigkeit, denn eines Theils ist wenigstens irgend ein Mittel zu den aus der Natur der Aufgabe gefundenen Ableitungen den Werth der Stammgröße für bestimmte Fälle in Zahlen anzugeben, für die Anwendung der Rechnung durchaus unentbehrlich, weil ohne ein solches die Aufgabe ganz unaufgelöst bleiben würde, andern Theils ist eine gute Näherung zuweilen selbst besser, als ein endlicher Ausdruck der Stammgröße, zu welchem dennoch, wenn er in Zahlen berechnet werden soll, immer wieder besondere Tafeln und andere Näherungen gehören. In jedem Falle ist eine bequeme Annäherung allein fähig, den Mangel eines endlichen Ausdrucks der Stammgrößen wenigstens einigermaßen zu ersetzen.

Wegen dieser Wichtigkeit des Gegenstandes will ich demselben hier einigen Raum widmen, und über einige der bekannteren Näherungs-Methoden einige Bemerkungen machen.

Erste Näherungs-Methode.

173.

Wenn die Stammgröße zu irgend einer entwickelt gegebenen Funktion einer veränderlichen Größe $dfx = \varphi x$ verlangt wird, so ist das nächste Mittel, im Fall keine Verwandlung des Ausdrucks in einen andern gelingt, von welchem endliche Ausdrücke der Stammgrößen bekannt sind, dieses, daß man $dfx = \varphi x$ in eine Reihe zu verwandeln sucht, die nach steigenden oder fallenden Potenzen von x fortschreitet, welches allemal und öfters durch die Methode der unbestimmten Coefficienten leicht angeht. Von dieser Reihe leitet man dann die einzelnen Glieder zurück, und die Summe der Stammgrößen der einzelnen Glieder ist der verlangten Stammgröße gleich, z. B. wenn $dfx = \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}$ wäre, so kann man $\frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}$ oder $(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ schon nach dem binomischen Lehrsatz in die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{3}{8}x^8 \ldots\ldots$$

verwandeln. Von dieser ist die Stammgröße

$$x - \frac{1}{2 \cdot 5}x^5 + \frac{3}{8 \cdot 9}x^9 \ldots\ldots + \text{Const.},$$

welches die verlangte Stammgröße von $\frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}$ ist.

Aber nur zu oft divergirt die Reihe, statt sich zu nähern, wie z. B. diese hier, welche sich nur nähert, wenn $x < 1$ ist. Auch ist die Entwickelung von dfx in eine Reihe nach x öfters sehr beschwerlich. Daher ist die Methode nicht zureichend.

Zweite Näherungs-Methode.

174.

Merkwürdig sind die Methoden, welche Reihen für die Stammgröße direct aus der gegebenen Ableitung, ohne Zurück-

leitung, geben. Sie beruhen auf der allgemeinen Entwickelung von $f(x+k)$ in eine Reihe, nämlich auf der Gleichung

$$f(x+k)=fx+kdfx+\frac{k^2}{2}d^2fx\ldots..$$

Die erste dieser Methoden besteht darin, daß man in diesen allgemeinen Ausdruck $k=-x$ setzt, denn alsdenn ist $f(x+k)=fx$ für $x=0$, weil der für x angenommene Werth $-k$ alle x aufhebt; also ist $f(x+k)$ eine Constante, z. B. a; folglich ist

$$a=fx-xdfx+\frac{x^2}{2}d^2fx\ldots,$$ woraus folgt

$$fx=a+xdfx-\frac{x^2}{2}d^2fx+\frac{x^3}{2.3.}d^3fx\ldots$$

Hier ist nun dfx gegeben, woraus d^2fx, d^3fx.... ohne irgend ein Hinderniß gefunden werden können, weil die Ableitungen aller Ausdrücke ohne Ausnahme angebbar sind. Also erhält man fx durch die bloße Ableitung ohne Zurückleitung.

Man kann sogar die Grenzen, zwischen welchen der genaue Werth von fx liegt, bei jedem beliebigen Gliede der Reihe, bei welchem man aufhören will, angeben. Die eine Grenze ist in dem allgemeinen Ausdruck von $f(x+k)$ bei einem beliebigen, z. B. bei dem nten Gliede, der Werth des Gliedes für x selbst, die andere Grenze ist der Werth eben dieses Gliedes, wenn man $x+k$ statt x setzt, welches sich etwa durch

$$f(x+k)=fx+kdfx+\frac{k^2}{2}d^2fx\ldots.+\frac{k^n}{2.3\ldots n}d^nf\left(\frac{x}{x+k}\right)$$

vorstellig machen läßt. Das heißt: Ist die Summe der sämmtlichen Glieder, die nach dem nten folgen, und die man wegläßt, eine positive Größe, so ist der Unterschied von

$$\frac{k^n}{2.3\ldots n}d^nfx \text{ und } \frac{k^n}{2.3\ldots n}d^nf(x+k)$$

auch eine positive Größe, die aber allemal größer ist, als die Summe der weggelassenen Glieder. Ist die Summe der Glie-

der negativ, so ist es jener Unterschied auch, und ebenfalls größer, so daß die Summe der weggelassenen Glieder allemal zwischen

$$\frac{k}{2.3\ldots n}d^n fx \text{ und } \frac{k^n}{2.3\ldots n}d^n f(x+k) \text{ liegt.}$$

Diesen allgemeinen und schönen Satz hat besonders Lagrange in der Théorie des fonctions sehr deutlich vorgetragen. Hier nun, wo $k=-x$ ist, sind die beiden Grenzen $\frac{k^n}{2.3..n}d^n fx$ und $\frac{x^n}{2.3.n}d^n fo$, wenn man unter $d^n fo$ versteht, daß in $d^n fx$, $x=o$ soll gesetzt werden. Also sind die Gränzen der verlangten Stammgröße

$$300.\ fx=a+xdfx-\frac{x^2}{2}d^2fx,\ldots+\frac{x^n}{2.3\ldots n}d^n f\binom{o}{x}$$

Es sey z. B. $dfx=\frac{1}{1+x}$, so ist

$$d^2fx=-\frac{1}{(1+x)^2}\ d^3fx=\frac{2}{(1+x)^3}\ldots d^n fx=\frac{1.2.3\ldots n-1}{(1+x)^n}$$

also ist

$$fx=a+\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{2(1+x)^2}+\frac{x^3}{3(1+x)^3}\ldots+\frac{x^n}{n(1+x)^n}.$$

Bekanntlich ist $\frac{1}{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)=\log(1+x)$, also drückt diese Reihe von fx den Logarithmen von $(1+x)$ aus, die Constante a ist $=o$, weil $\log(1+x)=o$ für $x=o$ ist. Bleibt man bei dem nten Gliede stehen, so liegt die Summe der weggelassenen Glieder zwischen $\frac{x^n}{n}$ und $\frac{x^n}{n(1+x)^n}$.

Man setze $\frac{x}{1+x}=z$, so ist $\frac{1+x}{x}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+1$, also

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{z}-1=\frac{1-z}{z} \text{ und } x=\frac{z}{1-z}, \text{ also}$$

$1+x=1+\frac{z}{1-z}=\frac{1}{1-z}$, folglich $\log(1+x)=-\log(1-z)$,

und folglich

$$\log(1-z)=-(z+\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3\ldots.)$$

wie bekannt.

Die Näherungs-Reihe (300.) ist im Wesentlichen die bekannte bernoullische Integrations-Reihe und kann in vielen Fällen gute Dienste leisten, doch hat man ihre Convergenz wenig in der Gewalt, z. B. in dem obigen Falle $fx=\log(1+x)$ convergirt sie für ein großes x nur wenig, auch ist selbst die algebraische Berechnung der Ableitungen höherer Ordnung in vielen Fällen zu mühsam.

Dritte Näherungs-Methode.

175.

Auch wenn man in die Entwickelung von $f(x+k)$, $x=0$ und $k=x$ setzt, erhält man für die Stammgröße fx ganz allgemein eine Reihe, nämlich

$$301.\quad fx=fox+x\,dfox+\frac{x^2}{2}d^2fox\ldots.+\frac{x^n}{2.3.3-n}d^nf\binom{o}{x}$$

wo die o vor dem x angezeigt, daß $x=0$ gesetzt werden soll.

In dem obigen Beispiele $dfx=\frac{1}{1+x}$ ist für diese Reihe

$fox=0$, $dfox=1$, $d^2fox=-1$

$d^3fox=2\ldots.d^nfox=2.3\ldots.n-1$, also ist fx oder

$$\log(1+k)=x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3\ldots..\pm\frac{1}{n}x^n\ldots..$$

Die Grenzen beim nten Gliede sind wieder $\frac{x^n}{n}$ und $\frac{x^n}{n(1+x)^n}$.
Diese Reihe für den Logarithmen ist die bekannte.

Es sey $dfx = \sin. x$, so ist $d^2fx = \cos. x$, $d^3fx = -\sin. x \ldots$, und bekanntlich $fx = \cos. x$, also

$fox = 1$, $dfox = 0$, $d^2fox = -1$, $d^3fox = 0$, $d^4fox = +1$ ꝛc, also

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2\ldots.6} \ldots\ldots$$

Die Grenzen sind $\frac{x^n}{2.3\ldots n}$ und $\frac{x^n}{2.3\ldots.n} \cos. x$, und die Reihe für $\cos. x$ ist die bekannte.

Es sey $dfx = \frac{1}{\log(e+x)}$, so ist $d^2fx = -\frac{1}{(e+x)\log(e+x)^2}$

$$d^3fx = \frac{1}{(e+x)^2 \log(e+x)^2} + \frac{1}{(e+x)^2 \log(e+x)^3} \text{ oder}$$

$$d^3fx = \frac{1}{(e+x)^2 \log(e+x)^2}\left(1 + \frac{1}{\log(e+x)}\right)$$

$$d^4fx = \frac{1}{(e+x)^2 \log(e+x)^2}\left(\left(1 + \frac{1}{\log(e+x)}\right)^2 - \frac{1}{(e+x)\log(e+x)}\right)$$

u. s. w., und bekanntlich $fx = \log\text{int.}(e+x)$, also ist für $x = 0$, weil $\log. e = 1$, $fox = \log\text{ int. } e$, $dfox = 1$, $d^2fox = -\frac{1}{e}$, $d^3fox = \frac{2}{e^2}$, $d^4fox = \frac{1}{e^2}\left(4 - \frac{1}{e}\right)$ ꝛc., also

$$302. \quad \log.\text{int.}(e+x) = \log\text{ int.} e + x - \frac{x^2}{2e} + \frac{x^3}{3e^2} + \frac{x^4}{2.3.4e^2}\left(4 - \frac{1}{e}\right)\ldots.$$

Auch diese Näherungs-Reihe kann in vielen Fällen nützlich seyn. Ihre Resultate sind wegen $x = 0$ einfacher, wie die der vorigen. Allein auch hier hat man die Convergenz nicht ganz in der Gewalt.

Vierte Näherungs-Methode.

176.

Man kann aus dem allgemeinen Ausdruck für $f(x+k)$ noch eine andere Reihe hernehmen, die ich sonst nicht gefunden habe. Es sey nämlich $dfx=y$ und $df(x+k)=y+e$, so ist für $k=-x$, $y+e=\text{const.}$ oder

$$y+e=b,\ \text{also}\ e=b-y.$$

Nun sey irgend eine von y abhängende Größe $\varphi y=u$, so ist

$$\varphi(y+e)=u+e\frac{d}{y}u+\frac{e^2}{2}\frac{d^2}{y^2}u\ldots+\frac{e^n}{1.2..n}\frac{d^n}{y^n}\varphi\frac{y}{y+e}$$

oder

$$\varphi(y+e)=u+(b-y)\frac{d}{y}u+\frac{(b-y)^2}{2}\frac{d^2}{y^2}u\ldots\frac{\pm(b-y)^2}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{y^n}\varphi\frac{y}{b}.$$

Für $k=-x$, wo $y+e=b$, oder

$$e=b-y \text{ und } \varphi(y+e)=\varphi(y+b-y)=\varphi o=\text{const.}$$

erhält man, wenn man diese zweite Constante $=c$ nennt

$$c=u+(b-y)\frac{d}{y}u+\frac{(b-y)^2}{2}\frac{d^2}{y^2}u\ldots\frac{(b-y)^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{y^n}\varphi\frac{y}{b}$$

Nun sey $\frac{d}{y}u=x$, so ist

$$\frac{d^2}{y^2}u=\frac{d}{y}x,\ \frac{d^3}{y^3}u=\frac{d^2}{y^2}x\ldots.$$

und was die Grenzen der Reihe betrifft, $x=o$ für $y=b$, denn b ist derjenige Werth von $y+e$, den man erhält, wenn man darin $k=-x$ oder $x=o$ setzt. Also ist

$$c=u+(b-y)x+\frac{(b-y)^2}{2}\frac{d}{y}x\ldots.+\frac{(b-y)^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{y^{n-1}}\frac{o}{x}$$

und hieraus

$$u=c-\left((b-y)x+\frac{(b-y)^2}{2}\frac{d}{y}x\ldots+\frac{(b-y)^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{y^{n-1}}\frac{o}{x}\right).$$

Nun ist $\frac{d}{x}(u) = \frac{d}{y} u \frac{d}{x} y$, weil y von x, u von y abhängt, folglich, weil $\frac{d}{y} u = x$ seyn soll, $\frac{d}{x}(u) = x \frac{d}{x} y$, oder wenn man auf beiden Seiten y addirt $y + \frac{d}{x}(u) = y + x \frac{d}{x} y$. Aber $y + x \frac{d}{x} y = \frac{d}{x}(xy)$, also

$$y + \frac{d}{x}(u) = \frac{d}{x}(xy),$$

und folglich, wenn man diese Gleichung zurückleitet,

$$\frac{x}{d} y + u = xy + \text{Const.}$$

Es war aber $dfx = y$, also ist $fx = \frac{x}{d} y + \text{Const.}$, mithin, wenn man die beiden Constanten zusammenzieht,

$$fx + u = xy + \text{Const. oder}$$
$$fx = xy - u + \text{Const.}$$

Setzt man hierin den obigen Werth von u, so kommt

$$fx = xy - \text{Const.} + (b-y)x + \frac{(b-y)^2}{2} \frac{d}{y} x \ldots + \frac{(b-y)^n}{1.2\ldots.n} \frac{d^{n-1}}{y^{n-1}} \binom{o}{x} \text{ oder}$$

$$303. \quad fx = bx + \frac{(b-y)^2}{2} \frac{d}{y} x + \frac{(b-y)^3}{2.3} \frac{d^2}{y^2} x \ldots + \frac{(b-y)^n}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}}{y^{n-1}} \binom{o}{x} - \text{Const.}$$

Diese Reihe ist ebenfalls ein Mittel, fx näherungsweise durch $y = dfx$ auszudrücken. Die Größe b ist darin der Werth von $df(x+k)$ für $x = -k$ oder von $dfx = y$ für $x = o$, und die Constante ist der Werth von fx für $x = o$, weil für $x = o$, $y = b$, also $b - y = o$, folglich $fox = \text{Const.}$ ist.

Für den Fall $fx = \log(1+x)$ ist $y = \frac{1}{1+x}$, also $1+x = \frac{1}{y}$ oder $x = \frac{1}{y} - 1$, folglich

$$\frac{d}{y}x = -\frac{1}{y^2},\ \frac{d^2}{y^2}x = \frac{2}{y^3},\ \frac{d^3}{y^3}x = -\frac{2\cdot 3}{y^4}\dots$$

ferner $b = 1$, also $b - y = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ und Const. $= \log. 1 = 0$, also

$$\log(1+x) = x + \frac{x^2}{2(1+x)^2}\cdot(-(1+x)^2) + \frac{x^3}{2\cdot 3(1+x)^3}\cdot 2(1+x)^3\dots$$

oder $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\dots$, wie bekannt.

Diese Näherungs-Methode ist von gleicher Art mit den beiden vorigen.

Fünfte Näherungs-Methode.

177.

Zuweilen läßt sich ein endlicher Ausdruck für die Stammgröße einer gegebenen Ableitung leichter finden, wenn man die Ableitung zuvor mit einer willkürlichen Größe multipliciren oder dividiren darf; z. B. von der Ableitung $\frac{1}{\log x}$ ist der endliche Ausdruck der Stammgröße nicht bekannt. Darf man hingegen $\frac{1}{\log x}$ zuvor z. B. mit $\log x$ multipliciren, so erhält man 1 und hiervon ist die Stammgröße x. Diese Bemerkung giebt Anlaß zu noch allgemeineren Reihen für Stammgrößen.

Man schreibe z. B. statt der gegebenen Ableitung y, indem man willkürliche Größen addirt und wieder subtrahirt, wie sie zur Vollständigkeit der Ableitungen, die man verlangt, nothwendig sind, Folgendes:

$$\alpha.\frac{y}{\alpha}+d\alpha\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

$$-\beta.\frac{d\alpha}{\beta}\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)-d\beta\frac{1}{d}\left[\frac{d\alpha}{\beta}.\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right]$$

$$+\gamma.\frac{d\beta}{\gamma}.\frac{1}{d}\left[\frac{d\alpha}{\beta}.\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right]+d\gamma\frac{1}{d}\left[\frac{d\beta}{\gamma}.\frac{1}{d}\left(\frac{d\alpha}{\beta}.\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right)\right]\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm d\nu\frac{1}{d}\left[\frac{d\mu}{\nu}\ldots\right],$$

wo sich allein d auf x bezieht, und welches durchaus nichts anders ist, als y, weil sich alle andern Glieder aufheben, nämlich das zweite mit dem dritten, das vierte mit dem fünften ꝛc.

In diesem Ausdruck sind α, β, γ .... ganz willkürliche Größen, die man also so annehmen kann, daß sich $\frac{1}{d}\frac{y}{\alpha}$, $\frac{1}{d}\left(\frac{d\alpha}{\beta}\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right)$ ꝛc. leicht angeben lassen. Je zwei neben einander stehende Glieder aber sind jedesmal eine vollständige Ableitung, nämlich die beiden ersten sind die vollständige Ableitung von $\alpha\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$, die beiden nächsten von $-\beta\frac{1}{d}\left[\frac{d\alpha}{\beta}.\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right]$, die beiden darauf folgenden von $\gamma\frac{1}{d}\left[\frac{d\beta}{\gamma}.\frac{1}{d}\left(\frac{d\alpha}{\beta}.\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right)\right]$ u. s. w., das letzte Glied $\pm d\nu\frac{1}{d}\left[\frac{d\mu}{\nu}\ldots\right]$ allein bleibt übrig. Also ist das verlangte

$$304.\quad \frac{1}{d}y=\alpha\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)-\beta\frac{1}{d}\left(\frac{d\alpha}{\beta}.\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right)+\gamma\frac{1}{d}\left(\frac{d\beta}{\gamma}.\frac{1}{d}\left(\frac{d\alpha}{\beta}.\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right)\right)\ldots\pm\frac{1}{d}\left[d\nu\frac{1}{d}\left(\frac{d\mu}{\nu}\ldots\right)+\text{Const.}\right.$$

Diese Formel hat Herr Professor Tralles hierselbst in den Abhandlungen der Berliner Academie von den Jahren 1804 bis 1811 mitgetheilt.

Setzt man

$$\beta=d\alpha,\ \gamma=d\beta,$$

so kommt

$$305.\quad \frac{1}{d}y = \alpha\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right) - d\alpha\frac{1}{d^2}\left(\frac{y}{\alpha}\right) + d^2\alpha\frac{1}{d^3}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\cdots$$

$$\cdots\cdots \pm \frac{1}{d}\left(d^n\alpha\,\frac{1}{d^n}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right) + \text{Const.}$$

wo noch α willkürlich ist.

Setzt man $\alpha = y$, so ist $\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{1}{d}(1) = x$, $\frac{1}{d^2}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$ $= \frac{1}{d}(x) = \frac{x^2}{2}$, $\frac{1}{d^3}\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{2\cdot 3}\cdots$, also ist

$$306.\quad \frac{1}{d}y = xy - \frac{x^2}{2}dy + \frac{x^3}{2\cdot 3}d^2y\cdots \pm \frac{1}{d}\left(\frac{x^n}{2\cdot 3\cdots n}d^n y\right)$$

$$+ \text{Const.},$$

welches mit der zweiten Näherungs-Formel (300.) übereinstimmt. Diese ist also nur ein ganz einzelner Fall der gegenwärtigen allgemeinen Formel.

Um das letzte Glied zu vermeiden, weil es noch eine besondere Zurückleitung erfordert, muß man die Reihe so weit fortsetzen, bis sie abbricht, oder wenn sie convergirt mit den entwickelten Gliedern, bis ins Unendliche fortlaufen lassen.

Zum Beispiele diene der Integral-Logarithme, für welchen $y = \frac{1}{\log x}$, und es sey $\alpha = \frac{1}{\log x}$, so ist

$$\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{1}{d}(1) = x \text{ und } d\alpha = \frac{-1}{x\log x^2}.$$

Ferner sey $\beta = \frac{1}{\log x^2}$, so ist $\frac{1}{d}\left(\frac{d\alpha}{\beta}\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right)$

$$= \frac{1}{d}\left[-\frac{1}{x}\cdot x\right] = \frac{1}{d}(-1) = -x,\ d\beta = -\frac{2}{x\log x^3}.$$

Es sey ferner $\gamma = \frac{1}{\log x^3}$, so ist $\frac{1}{d}\left(\frac{d\beta}{\gamma}\cdot\frac{1}{d}\left(\frac{d\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right)\right)$ $= \frac{1}{d}\left(-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{d}\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{d}(1)\right)\right) = 2x$ rc., also

$$\log \text{int.}\, x = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log x^2} + \frac{2x}{\log x^3} \ldots\ldots \text{ oder}$$

307. $$\log \text{int.}\, x = \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2}{\log x^2} + \frac{2.3.}{\log x^3} \ldots\right)$$

Nimmt man die andere Reihe, für welche $\beta = d\alpha$, $\gamma = d\beta \ldots$, so ist $\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right) = x$, also $\frac{1}{d^2}\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{d^3}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$ $= \frac{x^3}{2.3} \ldots$, $\alpha = \frac{1}{\log x}$, $d\alpha = -\frac{1}{x \log x}$, $d^2\alpha = \frac{1}{x^2 \log x}$ $+ \frac{1}{x^2 \log x^2} = \frac{1}{x^2 \log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) \ldots$, also

308. $$\log \text{int.}\, x = \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) \ldots\right)$$

Diese letzte Reihe convergirt schon, wenn $\log x$ größer als 1, und es ist leicht zu sehen, daß man die Convergenz wegen der Willkürlichkeit der Größen α, β, $\gamma \ldots$ noch mehr in der Gewalt hat. Die Reihe ist vielfacher Anwendungen fähig, und man kann der Reihen für die Stammgröße durch sie beliebige, also öfters unendlich verschiedene Formen geben.

Sechste Näherungs-Methode.

178.

Auf eine ähnliche Weise, wie für die vorige Formel, kann man auch schreiben

$$y = \alpha \cdot \frac{y}{\alpha} + d\alpha \frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

$$- \beta\, d\alpha \frac{\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)}{\beta} - d(\beta\, d\alpha) \frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)}{\beta}\right)$$

$$+ \gamma d(\beta d\alpha) \frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)}{\beta}\right) + d(\gamma d(\beta d\alpha)) \frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)}{\beta}\right)}{\gamma}\right) \ldots$$

$$\ldots\ldots \pm d(\nu d(\mu \ldots (\ldots),$$

wo sich rechter Hand ebenfalls alle Glieder bis auf das erste $\alpha \frac{y}{\alpha}$ aufheben, welches $= y$ ist, nämlich das zweite mit dem dritten, das vierte mit dem fünften u. s. w.

Je zwei neben einander stehende Glieder machen aber wieder eine vollständige Ableitung aus, folglich ist

$$309. \quad \frac{1}{d} y = \alpha \frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \beta d\alpha \frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)}{\beta}\right)$$

$$+ \gamma d(\beta d\alpha) \frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)}{\beta}\right)}{\gamma}\right)$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{1}{d}(d\nu(dm\ldots)\ldots) + \text{Const.}$$

wo α, β, γ gänzlich willkürlich sind.

Setzt man $\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right) = p$, $\frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\frac{y}{\alpha}}{\beta}\right) = q$ etc., so läßt sich die Formel auch, wie folgt, ausdrücken

$$310. \quad \frac{1}{d} y = \alpha \frac{1}{d}\frac{y}{\alpha} - \beta d\alpha \frac{1}{d}\frac{p}{\beta} + \gamma d(p d\alpha) \frac{1}{d}\left(\frac{q}{\gamma}\right) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{1}{d}(d\nu(d\mu\ldots\ldots)\ldots) + \text{Const.}$$

Diese Formel kommt im Wesentlichen mit derjenigen überein, die neuerdings Professor Soldner in der Théorie d'une nouvelle fonction transcendante (des Integral-Logarithmen) München 1809 mitgetheilt hat. Wie ich glaube, kommt sie schon bei Taylor vor.

Macht man $\alpha = y$ und $\beta = \gamma \ldots = 1$, so ist $\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$

$$= \frac{1}{d}(1) = x \frac{1}{d}\left(\frac{\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right)}{\beta}\right) = \frac{1}{d}(x) = \tfrac{1}{2}x^2 \text{ u. s. w.}$$

Ferner $d\alpha = dy$, $\beta d\alpha = dy$, $d(\beta d\alpha) = d^2 y$ ꝛc., also ist

$$\frac{1}{d}y = yx - \tfrac{1}{2}x^2 dy + \frac{1}{2.3}x^3 d^2 y \ldots\ldots$$

welches wieder die Bernouillische Näherungs-Formel (300.) ist. Macht man $\alpha = \beta = \gamma \ldots = x$, so ist

$$d\alpha = 1,\ d(\beta d\alpha) = 1 \text{ ꝛc., also}$$

$$311.\quad \frac{1}{d}y = x\left[\frac{1}{d}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{d}\left(\frac{p}{x}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{q}{x}\right)\ldots\right]$$

Es sey $y = x^m$, so ist $\frac{1}{d}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{d}(x^{m-1}) = \frac{x^m}{m} = p$, also $\frac{1}{d}\left(\frac{p}{x}\right) = \frac{x^m}{m^2} = q$, $\frac{1}{d}\left(\frac{q}{x}\right) = \frac{x^m}{m^3}\ldots$, also

$$\frac{1}{d}y = x^{m+1}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3}\ldots\right),$$

und weil $\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} \ldots\ldots = \frac{1}{m+1}$ ist,

$$\frac{1}{d}y = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \text{ wie gehörig.}$$

Macht man $\alpha = \beta = \gamma = x^n$, so ist $d\alpha = n x^{n-1}$, $\beta d\alpha = n x^{2n-1}$, $d(\beta d\alpha) = n.2n-1\, x^{2n-2}$, $\gamma d(\beta d\alpha) = n.2n-1\, x^{3n-2}$, $d(\gamma d(\beta d\alpha)) = n.2n-1.3n-2\, x^{3n-3}$ ꝛc. folglich ist

$$312.\quad \frac{1}{d}y = x^n \frac{1}{d}\left(\frac{y}{x^n}\right) - n x^{2n-1} \frac{1}{d}\left(\frac{p}{x^n}\right) + n.2n-1\, x^{3n-2} \frac{1}{d}\frac{q}{x^n}$$

$$- n.2n-1.3n-2\, x^{4n-3} \ldots \pm \frac{1}{d}(d\nu(d\mu \ldots)) + \text{Const.}$$

wo μ ganz willkürlich ist.

In dem obigen Falle $y = x^m$ ist $\frac{1}{d}\frac{y}{x^n} = \frac{1}{d}x^{m-n}$ $= \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1} = p$, $\frac{1}{d}\left(\frac{p}{x^n}\right) = \frac{1}{d}\frac{x^{m-2n+1}}{m-n+1}$

$$=\frac{x^{m-2n+2}}{m-2n+2)(m-n+1)}=q,\ r=\frac{x^{m-3n+3}}{(m-3n+3)(m-2n+2)(m-n+1)}$$

u. s. w., also

313. $$\frac{1}{d}x^m = x^{m+1}\left(\frac{1}{m-n+1}-\frac{n}{(m-n+1)(m-2n+2)}+\frac{n(2n-1)}{(m-n+1)(m-2n+2)(m-3n+3)}\right)$$

Da außerdem $\frac{1}{d}x^m=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, so folgt hieraus, daß

314. $$\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m-(n-1)}\left(1-\frac{n}{m-2(n-1)}+\frac{n(2n-1)}{(m-2(n-1))(m-3(n-1)}\cdots\right)$$

wo n willkürlich angenommen werden kann, welcher Satz bemerkenswerth ist. Für $n=1$ gilt derselbe

315. $$\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}\cdots,$$ wie bekannt.

Für $n=2$ kommt

316. $$\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m-1}\left(1-\frac{2}{m-2}+\frac{2\cdot3}{(m-2(m-3)}-\frac{2\cdot3\cdot4.}{(m-2)(m-3)(m-4)}\cdots\right)$$

Für $n=3$ kommt

317. $$\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m-2}\left(1-\frac{3}{m-4}+\frac{3\cdot5.}{(m-4)(m-6)}-\frac{3\cdot5\cdot7.}{(m-4)(m-6)(m-8)}\cdots\right)$$

u. s. w. Es ist leicht zu sehen, daß dergleichen Näherungs-Methoden auch außer ihrem eigentlichen Zweck zur Entdeckung mancher andern interessanten Reihe dienen können. Macht man

$\alpha = \beta = \gamma \ldots = \frac{1}{d \log y} = \frac{y}{dy}$, so ist $\frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{1}{d}(dy)$ $= y = p$, also

$$\frac{1}{d}\left(\frac{p}{\alpha}\right) = \frac{1}{d}(dy) = y = q.$$

Eben so $r = y$ u. s. w. Ferner $\beta d\alpha = \frac{y}{dy} d\left(\frac{y}{dy}\right) \gamma d(\beta d\alpha)$ $= \frac{y}{dy} d\left(\frac{y}{dy} d\left(\frac{y}{dy}\right)\right)$ ꝛc., also

$$318. \quad \frac{1}{d} y = \frac{y^2}{dy}\left(1 - d\left(\frac{y}{dy}\right) + d\left(\frac{y}{dy} d\left(\frac{y}{dy}\right)\right) \ldots\right)$$

$$\pm \frac{1}{d}(d\nu(d\mu \ldots)) + \text{Const.}$$

Wäre hier $y = e^x$, so wäre $dy = e^x$, $\frac{y}{dy} = 1$, $\frac{y^2}{dy} = e^x$, also $\frac{1}{d}(e^x) = e^x + \text{Const.}$, wie gehörig. Wäre $y = \frac{e^x}{x}$, welches auf den Integral-Logarithmen führt, so wäre $dy = \frac{e^x}{x}$ $- \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ und $\frac{y}{dy} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$, also

$d\left(\frac{y}{dy}\right) = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^2} = - \frac{1}{(x-1)^2}$, $d\left(\frac{y}{dy} d\left(\frac{y}{dy}\right)\right)$ $= -d\left(\frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}\right) = -d\left(\frac{x}{(x-1)^3}\right) = \frac{-1}{(x-1)^3}$ $+ \frac{3x}{(x-1)^4} = \frac{2x-1}{(x-1)^4} \ldots$ Ferner $\frac{y^2}{dy} = \frac{e^{2x}}{x^2 \cdot \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$ $= \frac{e^x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{e^x}{x-1}$, also

$$319. \quad \frac{1}{d}\left(\frac{e^x}{x}\right)=\frac{e^x}{x-1}\left(1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{(x-1)^4}\right.$$
$$\left.+\frac{4x^2-13x-6}{(x-1)6}\ldots\right)+\text{Cost.}$$

welches eine Reihe ist, die für ein großes X recht gut convergirt.

179.

Alle bisherige Näherungs-Methoden sind unmittelbar aus der allgemeinen Entwickelung

$$f(x+k)=fx+kdfx+\frac{k^2}{2}d^2fx\ldots.$$

hergenommen. Auch die allgemeine Formel, welche bei Summirung der Reihen gebraucht wird, kann zu einer Näherungs-Methode benutzt werden. Dies giebt die

Siebente Näherungs-Methode.

180.

Die erwähnte allgemeine Formel ist folgende:

$$320. \quad Sy=\alpha.\frac{1}{k}.\frac{1}{d}y+\beta y+k\gamma dy+k^2\delta d^2y+k^3\varepsilon d^3y\ldots.$$
$$+\text{Const.}$$

wenn Sy die Summe einer Reihe von Werthen der von x abhängenden gegebenen Größe y bedeutet, für eine correspondirende Reihe von Werthen der Größe x, die um k von einander abstehen, α, β, γ... aber unveränderliche Coefficienten sind, die mit den Bernoullischen Zahlen in Verbindung stehen. Dieser allgemeine Ausdruck läßt sich auf eine höchst einfache Weise herleiten, die ich sonst nicht gefunden habe. Ich will solche mittheilen, obgleich der Ausdruck selbst bekannt ist. Denn z. B. Euler handelt davon im 5ten und 7ten Kapitel des 2ten Bandes der Differential-Rechnung, Lacroix im 3ten Bande

der Differential- und Integral-Rechnung S. 70, 105 und 126 der ersten Ausgabe und Andere mehr.

Wenn nämlich $y = \varphi x$ wäre, so wird gesucht die Summe der Reihe φk, $\varphi(2k)$, $\varphi(3k) \ldots \varphi(2k) = \varphi x$, denn diese Summe bedeutet Sy. Nun setze man

$$kSy = p + kq + k^2 r \ldots,$$

wo p, q, $r \ldots$ Größen sind, die von x abhängen, so kommt, wenn man in diese Gleichung $x + k$ statt x setzt,

$$kS\varphi(x+k) = p + kdp + \frac{k^2}{2} d^2 p + \frac{k^3}{2 \cdot 3} d^3 p \ldots$$

$$+ kq + k^2 dq + \frac{k^3}{2} d^2 q \ldots,$$

$$+ k^2 r + k^3 dr \ldots$$

$$+ k^3 s \ldots$$

Zieht man von dieser Gleichung die ursprüngliche $kS\varphi x = p + kq + k^2 r \ldots$ ab, so erhält man auf der linken Seite die Größe $k(S\varphi(x+k) - S\varphi x)$; diese Größe aber ist nichts anders als $k\varphi(x+k)$, denn $S\varphi x$ bedeutet die Summe der Glieder φk, $\varphi(2k) \ldots$ bis φx mit Einschluß des letzten, hingegen $S\varphi(x+k)$ bedeutet die Summe dieser Glieder, um eins weiter bis zu $\varphi(x+k)$ mit Einschluß desselben; also ist der Unterschied von $\varphi(x+k)$ und φx nichts anders, als das letzte Glied $\varphi(x+k)$ selbst. Auf der rechten Seite bleibt übrig

$$kdp + \frac{k^2}{2} d^2 p + \frac{k^3}{2 \cdot 3} d^3 p \ldots$$

$$+ k^2 dq + \frac{k^3}{2} d^2 q \ldots$$

$$+ k^3 dr \ldots$$

welches also der Größe $k\varphi(x+k)$ gleich ist. Entwickelt man nun $\varphi(x+k)$ nach der allgemeinen Entwickelungs-Formel für $f(x+k)$, nämlich

$$\varphi(x+k)=\varphi x+k\,d\,\varphi x+\frac{k^2}{2}d^2\varphi x\ldots \text{ oder}$$

$$\varphi(x+k)=y+k\,dy+\frac{k^2}{2}d^2y\ldots,$$

so erhält man, wenn man noch überall mit k dividirt, die Gleichung

$$y+kdy+\frac{k^2}{2}d^2y+\frac{k^3}{2.3.}d^3y\ldots=dp+\frac{k}{2}d^2p+\frac{k^2}{2.3}d^3p+\frac{k^3}{2.3.4}d^4p\ldots$$

$$+kdq+\frac{k^2}{2}d^2q+\frac{k^3}{2.3}d^3q\ldots$$

$$+k^2dr+\frac{k^3}{2}d^2r\ldots$$

$$+k^3ds\ldots$$

Hieraus folgt, weil die Coefficienten zu gleichen Potenzen des willkürlichen k gleich seyn müssen,

$$dp=y,\ \text{also}\ p=\frac{1}{d}y$$

$$dq=dy-\tfrac{1}{2}d^2p,\ q=y-\tfrac{1}{2}dp=\tfrac{1}{2}y$$

$$dr=\tfrac{1}{2}d^2y-\tfrac{1}{2}d^3q-\frac{1}{2.3}d^2p,\ r=\tfrac{1}{2}(dy-dq-\tfrac{1}{3}d^2p)$$

$$r=\tfrac{1}{2}(dy-\tfrac{1}{2}dy-\tfrac{1}{3}dy)-\tfrac{1}{12}dy \text{ u. s. w.,}$$

also ist, wenn man die so eben gefundenen Werthe von p, q, r in die supponirte Gleichung $kSy=p+kq+k^2r\ldots$ substituirt und die Zahlen-Coefficienten durch α, β, γ bezeichnet,

$$kSy=\alpha\frac{1}{d}y+\beta ky+\gamma k^2dy\ldots \text{ oder}$$

$$Sy=\alpha\frac{1}{k}\frac{1}{d}y+\beta y+\gamma kdy+\delta k^2d^2y\ldots+\text{Const.},$$

wie es im Anfange dieses Absatzes behauptet wurde. Die Zahlen-Coefficienten sind

$\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{12}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = -\frac{1}{720}$, $\zeta = 0$ etc.

Daß bei dieser Herleitung die Form des Ausdrucks von Sy, nämlich die Form $p + kq + k^2r \ldots$ willkürlich vorausgesetzt wurde, ohne erst die Form zu untersuchen, geschah, wie es bei der Methode der unbestimmten Coefficienten, wenn man will, immer geschehen kann, und auch oben bei der allgemeinen Entwickelung von $f(x+k)$ geschehen ist. Diese Willkür hat weiter keine Gefahr, als daß man vielleicht eine Form annimmt, auf welche sich die zu entwickelnde Größe, ihrer Natur nach, nicht bringen läßt. Dann muß sich dies aber unfehlbar dadurch zeigen, daß man unmögliche oder gar keine Coefficienten findet. Findet man wirkliche Coefficienten, so können sie, wenn man sonst ohne Fehler rechnete, nie unrichtig seyn, und folglich ist auch durch die Coefficienten die Form der Reihe gerechtfertigt.

181.

Aus dem allgemeinen Summirungs-Ausdruck kann man nunmehr unmittelbar eine Reihe für die Zurückleitung hernehmen. Denn in derselben beruht die Summirung auf der Zurückleitung, weil sich das erste Glied $\alpha \frac{1}{k} \frac{1}{d} y$ rechter Hand auf eine Zurückleitung bezieht, also kann man auch umgekehrt die Zurückleitung durch die Summirung verrichten. Bringt man nämlich das Glied $\frac{1}{d} y$ auf die linke Seite und alles Uebrige auf die rechte, so erhält man, weil $\alpha = 1$ ist,

321. $$\frac{1}{d} y = k(Sy - \beta y - \gamma k dy - \delta k^2 d^2 y \ldots) + \text{Const.}$$

Man darf nur, um nach diesem Ausdruck die Stammgröße $\frac{1}{d} y$ aus einer gegebenen Ableitung y näherungsweise zu finden, die verschiedenen Werthe von $y = \varphi x$ für $x = k$, $x = 2k$, $x = 3k \ldots$ bis zu $x = nk$ berechnen und zusammen nehmen, so erhält man das erste Glied Sy. Berechnet man darauf auch noch dy, $d^2y \ldots$ sämmtlich für $x = nk$, zieht $\beta y + \gamma k dy$

$+ d k^2 d^2 y \ldots$ von $S y$ ab, und multiplicirt den Rest mit k, so erhält man näherungsweise die gesuchte Stammgröße $\frac{1}{d} y$ zu der gegebenen Ableitung y.

Die Reihe kann in vielen Fällen convergiren und folglich nützlich seyn. Allein die Convergenz hängt auch hier von dem Werth der Größen $d y, d^2 y \ldots$ für $x = n k$ ab, welches dann, wenn diese Größen alle oder einzelne von ihnen sehr groß sind, wenigstens wieder besondere Verwandlungen erfordert.

Achte Näherungs-Methode.

182.

Eine sehr einfache Näherungs-Methode, bei welcher es ebenfalls auf die Berechnung einzelner Werth der zurückzuleitenden Größe und ihrer Ableitung ankömmt, und welche ich sonst nicht gefunden habe, ist folgende:

Man darf nämlich nur die Stammgröße nach der allgemeinen Formel für $f(x+k)$, anstatt im Ganzen, für die ganze Ausdehnung von x auf einmal vielmehr stückweise etwa für gleich große Theile von x oder von einem y bis zum nächsten berechnen, und diese verschiedenen Theile zusammenziehen, welches das Ganze ebenfalls genau giebt. Wenn man nämlich den Werth der Stammgröße $d^{-1} y$ oder $d^{-1} \varphi x$ von $y = \varphi x$ in der Ausdehnung von $x = a$ bis $x = b$ verlangt, das heißt den Werth von $F b - F a$, wenn $d^{-1} y = F x$, so theile man den Abstand $b - a$ in eine beliebige Zahl n, etwa gleicher Theile, deren jeder $= k$ seyn mag, so daß

$$322. \quad n k = b - a.$$

Nun heiße der Werth des gegebenen y für $x = a$, $\overset{0}{y}$ für $x = a + k$, $\overset{1}{y}$ für $x = a + 2 k$, $\overset{2}{y}$ u. s. w. für $x = a + n k$ oder b, $\overset{n}{y}$; so kommt es auf den Ausdruck der einzelnen Theile der Stammgröße $F(x+k) - F x$, $F(x+2k) - F(x+k)$ u. s. w. an,

deren Summe die verlangte Größe $Fb - Fa$ ist. Nach der allgemeinen Formel ist

$$F(x+k) - Fx = k\,dFx + \frac{k^2}{2} d^2 Fx + \frac{k^3}{2.3} d^3 Fx \ldots\ldots$$

also weil dFx für den ersten Theil $= \overset{0}{y}$ ist,

$$F(x+k) - Fx = k\overset{0}{y} + \frac{k^2}{2} d\overset{0}{y} + \frac{k^3}{2.3} d^2\overset{0}{y} \ldots\ldots$$

Für den zweiten Theil der Stammgröße, welcher $= F(x+2k) - F(x+k)$ ist, ist $dFx = \overset{1}{y}$, also

$$F(x+2k) - F(x+k) = k\overset{1}{y} + \frac{k^2}{2} d\overset{1}{y} + \frac{k^3}{2.3} d^2\overset{1}{y} \ldots\ldots$$

Für den dritten Theil ist

$$F(x+3k) - F(x+2k) = k\overset{2}{y} + \frac{k^2}{2} d\overset{2}{y} + \frac{k^3}{2.3} d^2\overset{2}{y} \ldots\ldots$$

u. s. w. Zieht man also alle diese einzelnen Theile zusammen, so erhält man das verlangte $Fb - Fa$ oder

$$323. \quad d^{-1}\varphi b - d^{-1}\varphi a = k\left(\overset{0}{y} + \overset{1}{y} + \overset{2}{y} \ldots\ldots \overset{n-1}{y}\right)$$
$$+ \frac{k^2}{2}\left(d\overset{0}{y} + d\overset{1}{y} + d\overset{2}{y} \ldots\ldots d\overset{n-1}{y}\right)$$
$$+ \frac{k^3}{2.3}\left(d^2\overset{0}{y} + d^2\overset{1}{y} + d^2\overset{2}{y} \ldots\ldots + d^2\overset{n-1}{y}\right) \text{ꝛc.}$$

Es werde der Logarithme der Zahl b gesucht, so ist $Fb = \log b$, also $Fa = 0$, und folglich $\log a = 0$ und $a = 1$. Die einzeln zusammenzuziehenden Theile sind also

$$\log(1+k) - \log 1,\ \log(1+2k) - \log(1+k),$$
$$\log(1+3k) - \log(1+2k) \text{ oder}$$

$$\log (1+k,\ \log\frac{1+2k}{1+k},\ \log\frac{1+3k}{1+2k} \text{ ꝛc., folglich}$$

$$\log a = \log(1+k) + \log\frac{1+2k}{1+k} + \log\frac{1+3k}{1+2k} \ldots \log\frac{1+nk}{1+(n-1)k}$$

wie auch außerdem klar ist; denn zieht man die einzelnen Theile wirklich zusammen, so kommt

$$\log a = \log\frac{(1+k)(1+2k)(1+3k)\ldots(1+nk)}{(1+k)(1+2k)(1+3k)\ldots 1+\overline{n-1}\,k}$$

$$= \log(1+nk) = \log b.$$

Da alle die Zahlen $\frac{1+2k}{1+k}$, $\frac{1+3k}{1+2k}$ u. s. w., wenn man k hinreichend klein annimmt, der 1 sehr nahe kommen, so lassen sich die einzelnen Logarithmen leicht berechnen, also kann man die Convergenz der Reihe für die einzelnen Theile des gesuchten Logarithmen nach Belieben verstärken. Z. B. wenn der Logarithme von 2 gesucht würde, und man setzt $k = \frac{1}{10}$, so ist

$$\log 2 = \log\tfrac{11}{10} + \log\tfrac{12}{11} + \log\tfrac{13}{12} \ldots + \log\tfrac{20}{19},$$

wonach der verlangte Logarithme bequem berechnet werden kann.

Nach der obigen Formel selbst ist für den Fall, daß

$$y = \frac{1}{1+x} \text{ ist,}$$

$$\overset{0}{y} = 1,\ \overset{1}{y} = \frac{1}{1+k},\ \overset{2}{y} = \frac{1}{1+2k} \ldots$$

Ferner ist $dy = -\frac{1}{(1+x)^2} = -y^2$, also ist

$$d\overset{0}{y} = -1,\ d\overset{1}{y} = -\frac{1}{(1+k)^2}\ d\overset{2}{y} = -\frac{1}{(1+2k)^2} \ldots$$

Sodann ist $d^2y = -2y\,dy = -2y.-y^2 = 2y^3$, also

$$d^2\overset{0}{y} = 2,\ d^2\overset{1}{y} = \frac{2}{(1+k)^3},\ d^2\overset{2}{y} = \frac{2}{(1+2k)^3} \ldots$$

also ist

$$324.\quad \log b = k\left(1 + \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1+3k} \cdots \frac{1}{1+nk}\right)$$
$$-\frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+k)^2} + \frac{1}{(1+2k)^2} + \frac{1}{(1+3k)^2} \cdots \frac{1}{(1+nk)^2}\right)$$
$$+\frac{k^3}{3}\left(1 + \frac{1}{(1+k)^3} + \frac{1}{(1+2k)^3} + \frac{1}{(1+3k)^3} \cdots \frac{1}{(1+nk)^3}\right)$$

u. s. w.

Wird nun k sehr klein angenommen, so kann man sich mit einigen Gliedern begnügen. Wollte man blos bei dem ersten Gliede $k\left(1 + \frac{1}{1+k} + \ldots \frac{1}{1+nk}\right)$ stehen bleiben, so wäre dieses Glied, weil

$$\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 - k^3 \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1+2k} = 1 - 2k + 4k^2 - 8k^3 \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1+3k} = 1 - 3k + 9k^2 - 27k^3 \ldots\ldots \text{ ist,}$$

wenn man die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n durch Sn, die Summe ihrer Quadrate durch Sn^2, die Summe der dritten Potenzen durch Sn^3 u. s. w. bezeichnet, $= k(n - kSn + k^2 Sn^2 - k^3 Sn^3 \ldots)$, oder weil $kn = b - 1$ ist,

$$\log b = b - 1 - k^2(Sn - kSn^2 + k^2 Sn^3 \ldots)$$

oder auch, weil $k = \frac{b-1}{n}$ ist,

$$325.\quad \log b = (b-1)\left[1 - (b-1)\frac{Sn}{n^2} + (b-1)^2 \frac{Sn^2}{n^3} \ldots\right]$$

wo n, strenge genommen, ∞ groß seyn muß.

Aus der Summirungs-Formel in (180.) kann man bequem die Größen Sn, Sn^2 u. s. w. finden. Das dortige k

nämlich ist hier 1, weil die Summen für die um 1 von einander abstehenden natürlichen Zahlen gesucht werden; das dortige y hingegen ist hier der Reihe nach n, n^2, n^3 u. s. w., also ist das erste Glied des dortigen Ausdrucks für S y, worauf es nur ankommt, weil die folgenden Glieder niedrigere Potenzen von n enthalten, $=\frac{1}{d}y$, welches hier $\frac{1}{d}n$ für S n, $\frac{1}{d}n^2$ für Sn^2 &c., giebt also $Sn = \frac{1}{2}n^2$, $Sn^2 = \frac{1}{3}n^3$, $Sn^3 = \frac{1}{4}n^4 \ldots\ldots$, folglich ist

$$\log b = b - 1 - \frac{(b-1)^2}{2} + \frac{(b-1)^3}{3} - \frac{(b-1)^4}{4} \ldots\ldots$$

welches wieder die bekannte Formel für den Logarithmen ist. Wollte man die beiden ersten Glieder annehmen, so wäre das zweite Glied noch zu dem obigen ersten hinzuzurechnen. Es ist bekanntlich

$$\frac{1}{(1+k)^2} = 1 - 2k + 3k^2 - 4k^3 + 5k^4 \ldots\ldots,$$

wo die Zahlen-Coefficienten die natürlichen Zahlen sind. Für das dritte, vierte Glied u. s. w. sind sie die sogenannten figurirten Zahlen, also ist

$$\frac{1}{(1+2k)^2} = 1 - 2.2k + 3.4k^2 - 4.8k^3 + 5.16k^4 \ldots\ldots \text{ \&c.},$$

also ist das zweite Glied

$$= -\frac{k^2}{2}(n - 2k\,Sn + 3k^2\,Sn^2 - 4k^3\,Sn^3 \ldots)$$

$$= -\frac{1}{2}k\left(b - 1 - \frac{2(b-1)^2}{n^2}Sn + \frac{3(b-1)^3}{n^3}Sn^2 \ldots\right)$$

$$= -\frac{(b-1)^2}{2n}\left(1 - 2(b-1)\frac{Sn}{n^2} + 3(b-1)\frac{2Sn^2}{n^3} \ldots\right)$$

folglich wäre

$$\log b = (b-1)\left[1 - (b-1)\frac{Sn}{n^2} + (b-1)^2\frac{Sn^2}{n^3} \ldots\right]$$

$$- \frac{(b-1)^2}{2n}\left[1 - 2(b-1)\frac{Sn}{n^2} + 3(b-1)^2\frac{Sn^2}{n^3} \ldots\right] \text{ oder}$$

$$326. \quad \log b = (b-1)\left[1 - \frac{b-1}{2n}\right] - (b-1)^2 \frac{Sn}{n^2}\left[1 - \frac{2(b-1)}{2n}\right]$$
$$+ (b-1)^3 \frac{Sn}{n^3}\left[1 - \frac{3(b-1)}{2n}\right] \ldots,$$

wo n sehr groß seyn muß. Diese Ausdrücke für den Logarithmen, so wie die andern, wenn man mehrere Glieder der Reihe nimmt, sind mehr zu bemerken wegen ihrer Gestalt und der Art, wie sie gefunden worden, als wegen der Convergenz, die sich bekanntlich auf andern Wegen viel besser erreichen läßt.

Diese achte Näherungs-Methode kann in andern Fällen, wo sich von der gegebenen Größe y und ihren Ableitungen mehrere Werthe bequem berechnen lassen, nützlich seyn; denn da k willkürlich ist, so kann man es so klein annehmen, daß zuweilen blos einige der ersten Glieder zur Näherung hinreichen, jedoch hängt die Convergenz auch dieser Reihe von dem Werthe der Größe dy, d^2y.... ab.

182.

Welchen Einfluß diese Größen auf alle Näherungs-Reihen haben, in welchen sie vorkommen, ist deutlich zu sehen, wenn man die Aufgabe, die Stammgröße von y zu finden, auf einen Fall der Geometrie anwendet. Läßt man nämlich die gegebene Größe y die Ordinaten einer Curve bedeuten, deren Absciſſe x ist, so ist bekanntlich die Stammgröße zu y die Fläche der Curve unter den Coordinaten, und die Stammgröße $d^{-1}y$ von y berechnen, heißt nichts anders, als die Curve quadriren; weshalb auch zuweilen die Zurückleitung einer Ableitung erster Ordnung, die nur von einer veränderlichen Größe abhängt, die Quadratur genannt wird.

Bei der Curve, deren Ordinate y ist, beziehen sich nun die Größen dy, d^2y.... auf die Natur ihrer Krümmung. So bedeutet z. B. dy die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die an der Ordinate, die Curve berührende gerade Linie mit der Axe der x macht. So wie sich also die Krümmung der Curve der Perpendicularität auf die Axe nähert, wird dy sehr groß, und unendlich groß, sobald die Curve auf der Axe

senkrecht steht. Dieses kann aber geschehen ohne einen bedeutenden Einfluß auf die Größe der Fläche der Curve unter den Coordinaten, folglich sind alle Formeln, welche die Größen dy, d^2y... enthalten, zur Annäherung an die Stammgröße wenig geschickt. Liegt gar ein Wendungs-, ein Rückkehr-Punkt oder eine Asymptote in dem Umfange der Ausdehnung, für welche man die Stammgröße verlangt, so werden die Ausdrücke unbestimmt, und man läuft selbst Gefahr, wenn man dergleichen singuläre Punkte nicht vorher kennt, um in denselben die Stammgröße theilen zu können, unrichtige Resultate zu bekommen.

184.

Um diesem Uebel auszuweichen, ist man vielfältig um Ausdrücke bemüht gewesen, welche die Größen dy, d^2y... nicht enthalten. Das Mittel, zu dergleichen Ausdrücken zu gelangen, besteht im Allgemeinen darin: anstatt die genaue Stammgröße $\frac{1}{d}y$ annäherungsweise zu suchen, das heißt, anstatt die wirkliche Curve $y = \varphi x$ annäherungsweise zu quadriren, vielmehr irgend eine andere leicht angebbare Größe $F'x$ willkürlich anzunehmen, die der wahren Größe, ihrer Natur nach, nahe kommt, und diese Größe $F'x$ genau zu berechnen, oder was dasselbe ist, irgend eine andere Curve $y = \varphi' x$, die sich leicht quadriren läßt, und die der gegebenen nahe kommt, willkürlich anzunehmen, diese neue Curve $y = \varphi x$ genau zu quadriren, und ihre Fläche für die gesuchte zu nehmen. Hieraus entstehen noch mehrere Näherungs-Methoden.

Neunte Näherungs-Methode.

185.

Was sich zunächst darbietet, ist, daß man die zu quadrirende Curve als ein Polygon betrachtet, das heißt, daß man in willkürlichen, etwa gleichen Entfernungen von einander, Ordinaten zieht, alsdann die Punkte, in welchen diese Ordinaten die Curve schneiden, mit geraden Linien verbindet, und die Fläche zwischen

der entstehenden gebrochenen Linie und den äußersten Coordinaten statt der gesuchten Fläche nimmt. Hierauf beruht die erste Näherungs-Methode, welche Kramp in dem sechsten Bande der Annalen der Mathematik von Gergonne S. 281 ꝛc. vorschlägt.

Fig. 33. Verbindet man blos die Punkte A' und B', in welchen die beiden äußersten Ordinaten die Curve schneiden, mit einer geraden Linie, so entfernt sich das nebenstehende Viereck $A B A' B'$ am weitesten von der Fläche der Curve. Zieht man mitten zwischen den beiden äußersten Ordinaten eine dritte Ordinate CC' und verbindet die drei Durchschnitts-Punkte der Ordinaten und der Curve mit zwei geraden Linien $A'C'$ und $B'C'$, so kommt das Fünfeck $A B B' C' A'$ der Fläche der Curve schon näher. Man nähert sich derselben noch mehr, wenn man mehrere Ordinaten zieht, und kann damit so weit gehen, als man will.

Trägt man die Zahlen-Werthe, welche die Flächen der verschiedenen Polygone ausdrücken, auf diejenigen Ordinaten, welche um einen von den Theilen, in welche man die ganze Abscisse getheilt hat, von der ersten Ordinate entfernt sind, also z. B. den Zahlenwerth der Fläche des Vierecks $A B A' B'$ auf die Ordinaten $B B'$ etwa in $B\beta$, den Werth der Fläche des Fünfecks $A B B' C' A'$, auf die Ordinate $C C$ etwa in $C\gamma$, den Werth des Siebenecks $A' D' C' E' B' B A$, auf die Ordinate DD' etwa in $D\delta$, so entsteht eine neue Curve $\beta\varepsilon\gamma\delta\alpha$, welche die Annäherung der Fläche der verschiedenen Polygone an die Fläche der Curve bildlich darstellt. Diese neue Curve schneidet offenbar die erste Ordinate $A A'$ in α senkrecht, denn $A\alpha$ ist der wahre Werth der Curven-Fläche, weil dieses $A\alpha$ nach der für die Bildung der neuen Curve $\alpha\beta$ angenommenen Regel, die Fläche desjenigen Polygons ist, welches unendlich viele Ecken hat, oder für welches die Abscisse in unendlich viele Theile getheilt ist, welches dann mit der Curve ganz übereinkommt. Wenn also die Gleichung der neuen Curve $\alpha\beta$, $z = fx$ ist, so ist die trigonometrische Tangente dz des Winkels, welche die Tangente der Curve $\alpha\lambda$ mit der Axe der x macht, für den Punkt $\alpha = 0$. Hat man also die Gleichung der neuen Curve $\alpha\beta$, so darf man nur diejenige Ordinate derselben suchen, bei

welcher die Curve mit der Abscissen-Axe parallel, oder für welche $dz = o$ ist.

Nun kennt man mehrere Ordinaten der Curve $\alpha\beta$, und es kommt darauf an, daraus die Gleichung der Curve zu finden, welches ein gewöhnliches Interpolations-Verfahren ist. Kramp setzt die Gleichung der neuen Curve $\alpha\beta$,

$$z = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 \ldots,$$

wo also der erste Coefficient A der Werth der Fläche der gegebenen Curve $A'B'$ ist, denn für $x = o$ ist nach dieser Gleichung $z = A$, also ist A die Ordinate $A\alpha$ der neuen Curve, die der Abscisse $x = o$ entspricht, und welche angenommenermaßen die wahre Fläche der gegebenen Curve vorstellt. Man findet die Coefficienten der Gleichung, also auch A durch die Elimination, denn wenn man für die verschiedenen x, für welche man die Werthe der Ordinaten kennt, denselben diese Werthe giebt, z. B. wenn man für $x = AB$, die Ordinate $B\beta$ gleich der Fläche des Vierecks $ABB'A'$, für $x = AC$ die Ordinate $= c\gamma$ gleich der Fläche des Fünfecks $A'C'B'BA$ macht u. s. w., so erhält man so viel Gleichungen, als Ordinaten vorhanden sind. Giebt man der Gleichung $z = A + Bx^2 \ldots$ eine gleiche Zahl von Coefficienten, so findet man diese Coefficienten durch die gewöhnliche Elimination.

Kramp ist von dieser Methode, von welcher er die Ausführung der Rechnung in der oben erwähnten Abhandlung gegeben, und zu welcher er die Grund-Idee aus einer Schrift von Obenheim über die Wurflinien genommen hat, in der Folge wieder ab, und zu der folgenden einfacheren Methode übergegangen, und zwar wie es scheint mit Recht; denn in seiner ersten Methode ist zwar Alles, bis auf den Punkt, wo es darauf ankommt, die Gleichung der neuen Curve $\alpha\beta$ zu suchen, strenge richtig, allein von da ab ist es willkürlich, daß man für die neue Linie annimmt, sie solle parabolisch seyn. Freilich ist ohne diese oder sonst irgend eine Willkür überhaupt nicht weiter zu kommen. Man kann aber, wenn man sie gestattet, leichter zum Ziele gelangen.

Zehnte Näherungs-Methode.

186.

Diese einfache Methode, die auch Kramp im 6ten Bande der Annalen S. 372 2c., so wie mit einigen Berichtigungen, wiederholt im 9ten Bande derselben S. 373 2c. vorträgt, ist auch noch mehr der Grund-Idee gemäß, nicht sowohl die wahre Fläche der gegebenen Curve oder die wahre Stammgröße näherungsweise zu suchen, sondern vielmehr eine andere Curve, die sich bequem quadriren läßt, und die der gegebenen so nahe als möglich kommt, anzunehmen, ihre Fläche genau zu berechnen und diese dann für die Fläche der gegebenen Curve zu setzen. Man nimmt in der That hier eine andere Curve willkürlich an, die der gegebenen nahe kommt, und sucht ihre Fläche. Die Willkür, die man zuläßt, besteht also darin, unmittelbar eine andere Curve der gegebenen zu quadrirenden zu substituiren, anstatt daß bei der vorigen Methode der Gleichung der Curve, welche die verschiedenen nähernden Flächen vorstellig machte, eine willkürliche Gestalt gegeben wurde. Die gegenwärtige willkürliche Annahme ist offenbar einfacher und führt leichter zum Zweck.

Bekanntlich sind nun diejenigen Curven, welche sich am leichtesten genau quadriren lassen, Parabeln. Man nimmt also an, die gegebene Curve sey eine Parabel höherer Ordnung, deren Gleichung

$$327.\quad y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots \text{ ist.}$$

Die möglichste Annäherung dieser Parabel an die gegebene Curve sucht man dadurch hervorzubringen, daß man die beiden Curven in so vielen Punkten sich schneiden läßt, als man einzelne Ordinaten berechnen will. Nur zwischen diesen Punkten weichen also die beiden Curven von einander ab. Zieht man die Ordinaten, welche die beiden Curven gemein haben sollen, in gleichen Entfernungen, und zwar in der Entfernung 1 von einander, und nennt die Ordinaten für $x = 0$, a für $x = 1$, b für $x = 2$, c u. s. w., so ist, vermöge der angenommenen Gleichung der Parabel,

$$a = \alpha$$
$$b = \alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots$$
$$c = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 8\delta \ldots$$
$$d = \alpha + 3\beta + 9\gamma + 27\delta \ldots$$

u. s. w., und so viel Ordinaten man berechnen will oder kennet, so viel unbestimmte Coefficienten α, β, γ ... kann man einführen. Es kommt jetzt darauf an, aus diesen Gleichungen die Coefficienten α, β, γ ... durch Elimination zu suchen, um sie in die angenommene Gleichung der Parabel $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$ zu substituiren, allein die Gleichung dieser Parabel läßt sich in einer andern Form noch etwas leichter finden.

Dieselbe muß sich nämlich auf die Form

$$y = A + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)(x-2) \ldots$$

bringen lassen; dann setzt man in diese Gleichung, der Reihe nach, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2 \ldots$, so kommt, weil $y = a, b, c, \ldots$ für $x = 0, 1, 2 \ldots$

$$a = A$$
$$b = A + B$$
$$c = A + 2B + 2C$$
$$d = A + 3B + 32C + 32D$$

u. s. w., welches ebenfalls so viel Gleichuugen als unbestimmte Coefficienten sind. Hieraus folgt

$$A = a$$
$$B = b - A = b - a$$
$$2C = c - A - 2B = c - a - 2(b-a) = c - 2b + a$$
$$3.2D = d - A - 3B - 3.2C$$
$$= d - a - 3(b-a) - 3.2(c - 2b + a)$$
$$= d - 3c + 3b - a$$

u. s. w., oder wenn man die erste, zweite, dritte rc. Differenz der Größen a, b, c, ... durch Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$ bezeichnet

$$A = a$$
$$B = \Delta a$$

$$C = \frac{\Delta^2 a}{2}$$

$$D = \frac{\Delta^3 a}{2 \cdot 3}$$

u. s. w. Also ist die Gleichung der Parabel, welche die Ordinaten a, b, c... mit der gegebenen gemein hat,

$$328. \quad y = a + \Delta a . x + \frac{\Delta^2 a}{2} . x(x-1) + \frac{\Delta^3 a}{2 \cdot 3} x(x-1)(x-2) \ldots$$

Die Fläche dieser Parabel unter den Coordinaten, die man statt der Fläche der gegebenen Curve nehmen will, ist nun durch die Zurückleitung leicht zu finden. Ist die Zurückleitung geschehen, so muß man die Constante für $x = 0$ suchen, und dann die Stammgröße in dem Umfange von $x = 0$ bis $x = n$ nehmen, also $x = n$ setzen, wenn man n Ordinaten berechnen will. Also muß man auch bis zu der nten Differenz $\Delta^n a$ gehen. Kramp entwickelt ausführlich den Ausdruck der Stammgröße für verschiedene Zahlen der Ordinaten von $n = 1$ bis $n = 12$, und theilt die berechneten Zahlen-Coefficienten mit. Die Fläche der Curve wird nun blos durch die verschiedenen Ordinaten bestimmt und der Ausdruck derselben enthält blos diese Ordinaten, multiplicirt in bestimmte Zahlen-Coefficienten, die für alle Curven passen.

Von dieser Näherungs-Methode gehört wahrscheinlich die erste Idee Newton zu. Man findet diese erste Idee in dem fünften Opusculo auf Seite 281 des ersten Bandes der Castillon'schen Ausgabe von 1744. Die Newton'sche Abhandlung ist von 1711. Fast gleichzeitig hat Royer Cotes denselben Gegenstand weiter bearbeitet. Seine Abhandlung steht in einem Buche, welches den Titel hat: Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici. Auctore Rogero Cotes. Lemgoviae 1768. In diesem Buche ist mehr enthalten, als der Titel angiebt. Die zweite Abhandlung in demselben, de methodo differentiali Newtoniana überschrieben, enthält weitere Bemerkungen über die Newton'sche Idee der annäherungs=

weisen Quadratur. Die Resultate, welche Cotes am Schlusse der Abhandlung S. 86 giebt, und welche von n=1 bis n=10 berechnet sind, stimmen mit den Kramp'schen überein.

Ferner hat Herr Lambert Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt, welche sich unter dem Titel: „Quadratur und Rectification der krummen Linie durch geradlinige Vielecke, welche um dieselben und in denselben beschrieben werden können" im zweiten Theile seiner Beiträge zum Gebrauch der Mathematik, Berlin in der Real-Schul-Buchhandlung 1770 befinden, und deren Resultate im Wesentlichen ebenfalls auf die Newton-sche, Cotesische oder zweite Krämpsche Methode hinauskommen.

Eilfte Näherungs-Methode.

187.

Neuerdings hat Herr Hofrath Gauß in dem dritten Bande der Abhandlungen der Göttinger Universität von 1816 eine scharfsinnige Untersuchung über die näherungsweise Quadratur mitgetheilt, welche auch zugleich von der Cotesischen oder Newton'schen Methode handelt. Diese Abhandlung beschränkt sich nicht auf den Fall, wenn die Ordinaten gleich weit von einander entfernt sind, sondern erstreckt sich allgemeiner auf beliebige Abstände der Ordinaten. Für die Ordinaten wird ein Ausdruck von derjenigen Form gesetzt, welche Lagrange bei der Interpolation der Reihen gebraucht hat, nämlich

$$329.\quad y = A\,\frac{(t-a')(t-a'')(t-a''')\ldots(t-a^{(n)})}{(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots(a-a^{(n)})}$$

$$+A'\,\frac{(t-a)(t-a'')(t-a''')\ldots(t-a^{(n)})}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')\ldots(a'-a^{(n)})}$$

$$+A^{(n)}\frac{(t-a)(t-a')(t-a'')\ldots(t-a^{(n-1)})}{(a^{(n)}-a)(a^{(n)}-a')(a^{(n)}-a'')\ldots(a^{(n)}-a^{(n-1)})}$$

wo t auf die Abscisse überhaupt sich bezieht; $a, a', a'' \ldots a^{(n)}$ aber die bestimmten Abcissen für die einzelnen gegebenen Ordinaten bedeuten, heißt das Produkt $(t-a)(t-a')(t-a'')\ldots\ldots(t-a^{(n)})=T$,

so sind die Zähler der Coefficienten von A, A'' .... $= \frac{T}{t-a'}$, $\frac{T}{t-a'}$, $\frac{T}{t-a''}$ ꝛc., hingegen die Nenner sind das, was aus den Zählern wird, wenn man darin $t=a$, $t=a''$, $t=a''$.... setzt. Bezeichnet man sie durch M, M', M''..., so ist

$$330.\quad y = \frac{A\,T}{M\,(t-a)} + \frac{A'\,T}{M'\,(t-a')} + \frac{A''\,T}{M''\,(t-a'')} \ldots\ldots$$

Die Größen m, m', m''... sind nichts anders, als die Werthe von dT, wenn man darin der Reihe nach $t=a$, $t=a'$... setzt; denn es ist

$$\begin{aligned} dT = & (t-a')(t-a'')\ldots\ldots(t-a^{(n)}) \\ & + (t-a)(t-a'')\ldots\ldots(t-a^{(n)}) \\ & + (t-a)(t-a')(t-a''')\ldots\ldots(t-a^{(n)})\ldots\ldots \end{aligned}$$

welches $dT = (t-a')(t-a'')\ldots(t-a^{(n)}) = M$ giebt, wenn man $t=a$ setzt, $dT = (a'-a)(a'-a'')\ldots(a'-a^{(n)}) = M'$, wenn man $t=a'$ setzt u. s. w. Nun setze man

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} \ldots\ldots,$$

so ist zugleich, weil $T=0$ für $t=a$

$$0 = a^{n+1} + \alpha a^n + \alpha' a^{n-1} + \alpha'' a^{n-2} \ldots\ldots$$

also, wenn man die letzte Gleichung von der ersten abzieht,

$$T = t^{n+1} - a^{n+1} + \alpha(t^n - a^n) + \alpha'(t^{n-1} - a^{n-1}) \ldots\ldots$$

Alle Glieder rechter Hand sind durch $t-a$ theilbar, folglich enthält $\frac{T}{t-a}$ keinen Bruch mehr, sondern

$$\begin{aligned} \frac{T}{t-a} = & t^n + a\,t^{n-1} + a^2\,t^{n-2} + a^3\,t^{n-3} \ldots\ldots + a^n \\ & + \alpha(t^{n-1} + a\,t^{n-2} + a^2\,t^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-1}) \\ & + \alpha(t^{n-2} + a\,t^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-2}) \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

Die Stammgröße hierzu ist

$$d^{-1}\frac{T}{t-a}=\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{a\,t^{n}}{n}+\frac{a^2\,t^{n-1}}{n-1}\ldots\ldots+a^n t$$

$$+\alpha\left(\frac{t^n}{n}+\frac{a\,t^{n-1}}{n-1}\ldots\ldots+a^{n-1}t\right)$$

$$+\alpha'\left(\frac{t^{n-1}}{n-1}\ldots\ldots+a^{n-2}t\right) \text{ ꝛc.}$$

$$+\text{Const.}$$

also in der Ausdehnung von $t=0$ bis $t=1$

$$331.\quad d^{-1}\frac{T}{t-a}=\frac{1}{n+1}$$

$$+\frac{1}{n}(a+\alpha)$$

$$+\frac{1}{n-1}(a^2+a\alpha+\alpha')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\tfrac{1}{3}(a^{n-2}+\alpha a^{n-3}+\alpha' a^{n-4}\ldots\ldots+a(n-3))$$

$$+\tfrac{1}{2}(a^{n-1}+\alpha a^{n-2}+\alpha' a^{n-3}\ldots\ldots+a(n-2))$$

$$+(a^n+\alpha a^{n-1}+\alpha' a^{n-2}\ldots\ldots+a(n-1))$$

Nun wird bemerkt, daß wenn das Produkt der Größe T in die unendliche Reihe $t^{-1}+\tfrac{1}{2}, t^{-2}+\tfrac{1}{3}t^{-3}\ldots\ldots=T'+T''$ heißt und T' die Summe der Glieder mit positiven Exponenten, T'' die Summe der übrigen Glieder bedeutet, der obige Ausdruck für $d^{-1}\frac{T}{t-a}$ gerade die ersten Glieder für $t=0$ zusammen ausmachen, daß also

$d^{-1}\frac{T}{t-a}=T'$ sey. Nun war $M=dT$ für $t=a$, also ist $d^{-1}\frac{AT}{M(t-a)}=\frac{AT'}{dT}$ für $t=a$. Der nämliche Ausdruck giebt $d^{-1}\frac{A'T}{M'(t-a')}$ für $t-a'$ u. s. w. Die Summe dieser Aus-

drücke aber giebt die verlangte Stammgröße $\frac{1}{d}y$. Durch höchst sinnreiche Verwandlungen macht Herr Hofrath Gauß das gefundene Resultat für die Ausübung noch brauchbarer und giebt am Schlusse eine Anwendung auf den Integral-Logarithmen.

Zwölfte Näherungs-Methode.

188.

Durch ihre ungemeine Einfachheit zeichnet sich die Methode von Bérard, einem des Gesichts beraubten Mathematiker bei der Schule von Briançon, aus, für die Newtonsche Art durch Parabeln zu quadriren, die Coefficienten der Ordinaten in dem Resultat zu finden; auch weicht diese Methode in der Wahl der Parabeln von der Newtonschen, Cotesischen oder Krampschen etwas ab. Sie ist im 7ten Bande der Annalen der Mathematik von Gergonne mitgetheilt, und besteht im Wesentlichen in Folgendem:

Zuerst ist klar, daß der Ausdruck der Fläche einer gegebenen beliebigen Curve, wenn man sie für eine Parabel irgend einer Ordnung nimmt, nur aus einer Summe von Produkten der gegebenen Ordinaten in unveränderlichen Zahlen-Coefficienten bestehen könne, weil sich die Fläche jeder Parabel durch Produkte der Ordinaten in die Abscissen und bestimmten Zahlen-Coefficienten, die sich nach der Ordnung der Parabel richten, ausdrücken läßt, woraus folgt, daß der Ausdruck der Fläche blos die Ordinaten allein und bestimmte Zahlen-Coefficienten enthalten werde, weil nur die Ordinaten veränderlich, und für jeden Fall besonders gegeben sind, die Abcissen hingegen immer dieselben bestimmten Zahlen-Werthe haben, nämlich die erste $=0$ ist, die Unterschiede der übrigen aber der Einheit gleich gesetzt werden. Die Formel, welche die Fläche jeder beliebigen Curve unter den Coordinaten ausdrücken soll, muß also nothwendig die Gestalt

332. $\alpha A + \beta B + \gamma C + \varepsilon E \ldots$

haben, wo A, B, C... die gegebenen Ordinaten und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

bestimmte Zahlen-Coefficienten bedeuten, die für jede beliebige Curve die nämlichen sind.

Nun ist ferner klar, daß man nothwendig die nämliche Formel erhalten müsse, man mag von der einen Gränze der Fläche, oder von der andern, das heißt von der Abscisse o, oder von der äußersten größesten Abscisse anfangen, woraus folgt, daß allemal die Ordinaten, die gleich weit von den beiden Enden der Abcissen entfernt sind, in dem Flächen-Ausdruck, gleiche Coefficienten haben müssen. Man kann also allemal zwei Ordinaten zusammenfassen, nämlich die erste und letzte, die zweite und vorletzte, die dritte nach der ersten und die dritte vor der letzten u. s. w. Ist die Zahl der Ordinaten ungleich, so bleibt eine in der Mitte allein; ist sie gerade, so hat man durchweg Paare von Ordinaten. Bezeichnet man daher die Summe je zweier Ordinaten durch a, b, c, nämlich so, daß a die Summe der ersten und letzten, b die Summe der zweiten und vorletzten Ordinaten bedeutet u. s. w., so ist die Gestalt des Ausdrucks der Fläche einer beliebigen Curve, oder der Stammgröße von einer beliebigen Ableitung y,

$$333. \quad \frac{1}{d} y = \alpha a + \beta b + \gamma c + \varepsilon e \ldots.$$

Für diesen Ausdruck werden die Zahlen-Coefficienten α, β, γ... verlangt.

Da die Formel für jede beliebige Curve passen soll, so ist es gleichgültig, auf welche man sie anwendet. Es ist offenbar, daß man sie nur auf so viele verschiedene Curven anwenden darf, als die Formel Zahlen-Coefficienten hat, folglich auf eine Zahl von Curven, die gerade der Hälfte der Zahl der gegebenen Ordinaten gleicht, wenn diese eine gerade ist. Denn man kann diese Coefficienten bestimmen, sobald man so viele, sie enthaltende, Gleichungen hat, als ihrer sind. Die Wahl der Curven ist ganz willkürlich. Man kann also diejenigen nehmen, die sich am bequemsten quadriren lassen, und dieses sind die Parabeln verschiedener Ordnung, von der ersten oder der geraden Linie an. Herr Bérard legt den Scheitel dieser Parabeln in die Axe der x mitten zwischen die erste und letzte Ordinate,

z. B. in A (Fig. 34.), wo also die Parabel die Axe der x berührt, die gerade Linie CD aber parallel mit der Axe der x. Sowohl diese gerade Linie, als die sämmtlichen Parabeln CAD schneiden die beiden äußersten Ordinaten CE und DF in der Entfernung 1 von der Axe der x. Hierdurch erhalten die Gleichungen der Parabeln die möglich einfachste Gestalt. Denn die Gleichung einer Parabel in dieser Lage ist allgemein $y = \frac{x^n}{p^n}$. Ist nun die Zahl der gegebenen gleich weit, und zwar um 1, von einander entfernten Ordinaten $2m+1$, also m auf jeder Seite des Scheitels A, so ist für $x = E'a = m$, $y = CE = 1$, also $1 = \frac{m^n}{p^n}$, folglich $p = m$, mithin die Gleichung der Parabel

$$334.\quad y = \frac{x^n}{m^n},$$

wo n willkürlich ist, welches Bérard immer um 2, von 2 an bis zu 2m steigen läßt, um die nöthigen m verschiedener Parabeln zu finden. Daß n auf die Weise nur geraden Zahlen gleich gesetzt wird; geschieht wohl deshalb, damit die Parabeln für einerlei y zwei gleiche und entgegengesetzte x, ein positives und ein negatives erhalten, welches die Lage des Scheitels in der Mitte zwischen den äußersten Ordinaten erfordert.

Die Fläche der Parabel ist nun allgemein

$$335.\quad \frac{1}{d}y = \frac{x^{n+1}}{(n+1)m^n} = \frac{xy}{m+1},$$

welches für $x = AE = m$ und $y = CE = 1$, $\frac{m}{n+1}$ für die Fläche CAE, also für die ganze Fläche CEAFD

$$336.\quad \frac{2m}{n+1}$$

giebt. Die Fläche CEFD unter der geraden Linie CD ist

$$337.\quad 2m.$$

Die Flächen der verschiedenen Parabeln sind also, wenn man der Reihe nach die Gleichungen der Parabeln $y = \frac{x^2}{m^2}$, $y = \frac{x^4}{m^4}$ 2c., also der Reihe nach $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ setzt, mit Einschluß der geraden Linie

$$338.\quad 2m, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{5}, \frac{2m}{7} \ldots \frac{2m}{2m+1}.$$

Die verschiedenen Ordinaten BB', GG', HH' 2c. sind, der Reihe nach, für die gerade Linie sämmtlich 1,

$$\text{für die Parabel } y = \frac{x^2}{m^2}, = \frac{1}{m^2}, \frac{2^2}{m^2}, \frac{3^2}{m^2} \ldots \frac{m^2}{m^2}$$

$$\text{für die Parabel } y = \frac{x^4}{m^4}, = \frac{1}{m^4}, \frac{2^4}{m^4}, \frac{3^4}{m^4} \ldots \frac{m^4}{m^4} \text{ 2c.}$$

Das Doppelte von jeder giebt die Summe je zweier, von den Enden oder von der Mitte gleich weit entfernten Ordinaten, weil dieselben einander gleich sind u. s. w. Multiplicirt man also diese doppelten Ordinaten mit den unbestimmten Zahlen-Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nach der vorausgesetzten Gleichung $\frac{1}{d} y = \alpha a + \beta b + \gamma c \ldots$, so erhält man für die verschiedenen Parabeln, die gerade Linie einschließlich, ihre oben gefundene Fläche. Also ist

$$\text{für die gerade Linie } 2\alpha + 2\beta + 2\gamma \ldots + 2\mu + \nu = 2m,$$

$$\text{für die Parabel } \frac{x^2}{m^2}, 2\left(\frac{\alpha}{m^2} + \frac{2^2\beta}{m^2} + \frac{3^2\gamma}{m^2} \ldots + \frac{m^2\mu}{m^2}\right) = \frac{2m}{3}$$

$$\text{für die Parabel } \frac{x^4}{m^4}, 2\left(\frac{\alpha}{m^4} + \frac{2^4\beta}{m^4} + \frac{3^4\gamma}{m^4} \ldots + \frac{m^4\mu}{m^4}\right) = \frac{2m}{5} \text{ 2c}$$

oder

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots \ldots + \mu + \tfrac{1}{2}\nu = m$$

$$\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma \ldots \ldots + m^2\mu = \frac{m^3}{3}$$

$$\alpha + 2^4\beta + 3^4\gamma \ldots\ldots + m^4\mu = \frac{m^5}{5}$$

— — — — — — — — —

$$\alpha + 2^{2m}\beta + 3^{2m}\gamma \ldots + m^{2m}\mu = \frac{m^{2m+1}}{2m+1}.$$

Hier ist die Zahl m der Ordinaten auf jeder Seite des Scheitels der Zahl der Coefficienten α, β, $\gamma \ldots \mu$ gleich, also hat man so viele Gleichungen zur Bestimmung dieser Coefficienten, als ihrer sind, und kann folglich dieselben finden; denn der Gleichungen sind m + 1, der Coefficienten eben so viele.

Bérard findet die Coefficienten durch bloßes successives Abziehen der Gleichungen von einander. Nämlich wenn man die zweite von der dritten Gleichung, die dritte von der vierten u. s. w. abzieht, so erhält man m — 1 Gleichungen ohne den Coefficienten α, der sich überall aufhebt. Dividirt man diese Gleichungen durch den Coefficienten zu β und zieht wieder eine von der andern ab, so erhält man m — 2 Gleichungen, alle ohne β. So kann man fortfahren, bis alle Coefficienten bis auf den letzten weggeschafft sind, für welchen sich alsdann eine bestimmte Zahl findet.

Herr Bérard hat die Coefficienten für 2, 3, 4 u. s. w. bis 12 Ordinaten berechnet, wie Kramp, und dann auch noch für 24 Ordinaten. Beide Rechnungen stimmen nach Berichtigung einiger Rechnungsfehler genau. Zur Berechnung der Coefficienten für 24 Ordinaten, sagt Herr Bérard, wäre eine Zeit von etwa 100 Stunden nöthig gewesen. Ich werde die Quadrirungs- oder Zurückleitungs-Formeln mit den Coefficienten der Herren Bérard und Kramp am Schlusse dieses Aufsatzes für Diejenigen, welche die Annalen der Mathematik nicht zur Hand haben, mittheilen.

189.

Merkwürdig ist es, daß die Methode des Herrn Bérard bei einer so bestimmten Form und sogar Lage der Parabeln, das Nämliche geben konnte, was die Newton'sche Methode

giebt. Denn hätte Bérard andere Parabeln, oder andere Linien angenommen, z. B. statt der Parabeln $y=\frac{x^0}{m^0}$, $y=\frac{x^2}{m^2}$, $y=\frac{x^4}{m^4}$ die Parabeln $y=\frac{x^0}{m^0}$, $y=\frac{x^4}{m^4}$, $y=\frac{x^8}{m^8}\ldots$, so würde er, wie es scheint, andere Coefficienten gefunden haben. Er selbst sagt, daß die Coefficienten auf unzählige Arten gefunden werden können. In wie fern sie von den seinigen verschieden seyn würden, und welche, wenn sie verschieden sind, der Wahrheit am nächsten kommen, verdient gelegentlich noch eine besondere Untersuchung.

Dreizehnte Näherungs-Methode.

190.

Ich will für jetzt noch mittheilen, worauf ich selbst gekommen bin, ehe mir die Bérard'sche Methode aus dem oben erwähnten spätern Bande der Annalen bekannt war.

Es scheint nämlich, daß sich die Coefficienten directer aus der Natur der gegebenen Curve finden lassen.

191.

Es kommt auf die Gleichung der Linie, die eine gewisse Zahl von Ordinaten mit der gegebenen Curve gemein hat, eigentlich gar nicht an, sondern nur auf ihre Fläche unter den Coordinaten. Man kann also, wie folgt, verfahren. Die gegebenen Ordinaten sollen $\overset{0}{\alpha}, \overset{1}{\alpha}, \overset{2}{\alpha} \ldots \overset{m}{\alpha}$ heißen. Ihre Zahl soll $=m+1$ seyn. Von irgend einer willkürlichen Curve, welche diese Ordinaten für die bestimmten Abscissen hat, sey die Gleichung $y=fx$, welche aber nicht zu entwickeln nöthig ist, so ist

die erste Ordinate $\overset{0}{\alpha}=y$,

die zweite $\overset{1}{\alpha}=y+kdy+\frac{k^2}{2}d^2y+\frac{k^3}{2.3}d^3y \ldots\ldots+\frac{k^m}{2.3\ldots m}d^my$,

die dritte $\overset{2}{\alpha} = y + 2kdy + \frac{2^2k^2}{2} d^2y + \frac{2^3k^3}{2 \cdot 3} d^3y \ldots + \frac{2^m k^m}{2 \cdot 3 .. n} d^m y$

die vierte $\overset{m}{\alpha} = y + 3kdy + \frac{3^2k^2}{2} d^2y + \frac{3^3k^3}{2 \cdot 3} d^3y \ldots + \frac{3^m k^m}{2 \cdot 3 \ldots n} d^m y$

und so weiter

die $m+1$te, $\overset{m}{\alpha} = y + mkdy + \frac{m^2k^2}{2} d^2y + \frac{m^3k^3}{2 \cdot 3} d^3y \ldots + \frac{m^m k^m}{2 \cdot 3 \ldots n} d^m y$

Nun soll die Fläche der neuen Curve so ausgedrückt werden, daß man die ganze Absciſſe mk mit einem angemessenen Mittel aus den Ordinaten multiplicirt, welches Mittel man dadurch ausdrücken kann, daß man die verschiedenen Ordinaten mit bestimmten Zahlen-Coefficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots \overset{m}{a}$ multiplicirt und diese Ordinaten-Theile zusammenrechnet, also durch eine Formel, wie

$$339. \quad mk\left(\overset{0}{a}\overset{0}{\alpha} + \overset{1}{a}\overset{1}{\alpha} + \overset{2}{a}\overset{2}{\alpha} \ldots\ldots + \overset{m}{a}\overset{m}{\alpha}\right)$$

Die Fläche der neuen Curve wird also ausgedrückt durch

$$340. \quad mk\Big[\overset{0}{a}y$$
$$+\overset{1}{a}\left(y + kdy + \frac{k^2}{2}d^2y + \frac{k^3}{2 \cdot 3}d^3y \ldots\ldots + \frac{k^m}{2 \cdot 3 \ldots m}d^m y\right)$$
$$+\overset{2}{a}\left(y + 2kdy + \frac{2^2k^2}{2}d^2y + \frac{2^3k^3}{2 \cdot 3}d^3y \ldots\ldots + \frac{2^m km}{2 \cdot 3 \ldots m}d^m y\right)$$
$$+\overset{3}{a}\left(y + 3kdy + \frac{3^2k^2}{2}d^2y + \frac{3^3k^3}{2 \cdot 3}d^3y \ldots + \frac{3^m km}{2 \cdot 3 \ldots m}d^m y\right)$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$+\overset{m}{a}\left(y + mkdy + \frac{m^2k^2}{2}d^2y + \frac{m^3k^3}{2 \cdot 3}d^3y \ldots + \frac{m^m k^m}{2 \cdot 3 \ldots m}d^m y\right)\Big]$$

Andrerseits ist diese Fläche von der ersten Ordinate an bis zur

letzten, wenn die gesammte Fläche vom Anfangs-Punkt der Abscisse bis zur ersten Ordinate Fx heißt

$$\Delta Fx = mkdFx + \frac{m^2k^2}{2} d^2Fx + \frac{m^3k^3}{2.3} d^3Fx \ldots + \frac{m^{m+1}k^{m+1}}{2.3..\overline{m+1}} d^{m+1}Fx$$

oder weil bekanntlich $dFx = y$ ist,

$$341.\quad \Delta Fx = mk\left(y + \frac{mk}{2} dy + \frac{m^2k^2}{2.3} \ldots + \frac{m^m k^m}{2.3..\overline{m+1}} d^m y\right)$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke (340. u. 341.) der Fläche mit einander und setzt die Coefficienten zu y, dy, $d^2y \ldots$ einander gleich, so erhält man die Gleichungen

$$342.\quad \begin{cases} \overset{0}{a} + \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots\ldots + \overset{m}{a} = 1 \\ \overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + 3\overset{3}{a} \ldots\ldots + m\,\overset{m}{a} = \frac{m}{2} \\ \overset{1}{a} + 2^2\overset{2}{a} + 3^2\overset{3}{a} \ldots\ldots + m^2\overset{m}{a} = \frac{m^2}{3} \\ \text{— — — — — — — —} \\ \overset{1}{a} + 2^m\overset{2}{a} + 3^m\overset{3}{a} \ldots + m^m\overset{m}{a} = \frac{m^m}{m+1}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen können die sämmtlichen Coefficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots \overset{m}{a}$ gefunden werden, denn es sind der Gleichungen so viele, als Coefficienten, nämlich $m + 1$.

192.

Wäre die Curve $y = fx$ etwa die gegebene Curve selbst, und wäre diese von der Art, daß keine Ableitung der Ordinaten constant ist und die folgende verschwindet, wie es häufig geschieht, so müßte man unendlich viele Ordinaten nehmen, und folglich unendlich viele Coefficienten berechnen, denn m wäre dann unendlich groß. Um dieses zu vermeiden, nimmt man willkürlich irgend eine Curve an, von deren Ordinaten die $n$te Ableitung constant ist. Parabolische Linien haben diese Eigenschaft.

Ihre Gleichung selbst ist aber für diese Untersuchung gleichgültig. Die Fläche einer solchen Linie, die alsdann die $m+1=n$ Ordinaten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ mit der gegebenen Curve gemein hat, nimmt man für die Fläche der gegebenen Curve. Für die neue Curve ist dann die Zahl $m+1=n$ der Coefficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a} \ldots \overset{m}{a}$ immer begrenzt und der Ausdruck

$$mk\left(\overset{0}{a}\overset{0}{\alpha}+\overset{1}{a}\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{a}\overset{2}{\alpha}\ldots+\overset{m}{a}\overset{m}{\alpha}\right) \quad (339.)$$

giebt die Fläche der neuen Curve genau, und folglich auf diesem Wege die Fläche der gegebenen Curve näherungsweise.

193.

Es ist aber nicht nöthig, alle $m+1$ Coefficienten zu berechnen. Man darf nur die erste oder letzte Hälfte derselben, nebst dem mitteln suchen, wenn die Zahl ungerade ist; denn der erste Coefficient ist dem letzten, der zweite dem vorletzten u. s. w. gleich, welches sich, wie folgt, zeigen läßt.

Es heiße nämlich die letzte Ordinate z, so ist die vorletzte

$$z-kdz+\frac{k^2}{2}d^2z-\frac{k^3}{2.3}d^3z \ldots \pm \frac{k^m}{2.3\ldots m}d^mz,$$

die zweite vor der letzten

$$=z-2kdz+\frac{2^2k^2}{2}d^2z-\frac{2^3k^3}{2.3}d^3z \ldots \pm \frac{2^mk^m}{2.3\ldots m}d^mz$$

— — — — — — — — — — — — —

die erste $z-mkdz+\frac{m^2k^2}{2}d^2z-\frac{m^3k^3}{2.3}d^3z \ldots \pm \frac{m^mk^m}{2.3\ldots m}d^mz$

Die Fläche der Curve über der Absciffe nk ist

$$\Delta F=-mkz+\frac{m^2k^2}{2}d^2z-\frac{m^3k^3}{2.3}d^3z \ldots \pm \frac{m^{m+1}k^{m+1}}{2.3\ldots m+1}d^mz.$$

Hieraus folgt, wenn man die letzte Ordinate mit $\overset{m}{a}$, die vorletzte mit $\overset{m-1}{a}$ u. s. w., das Ganze aber mit der Absciffe $-mk$ mul-

tiplicirt, um nach der Formel $mk\left(\overset{0}{a}\alpha+\overset{1}{a}\beta\ldots+\overset{m}{a}\nu\right)$ (339.) die Fläche zu finden, und darauf diesen Ausdruck demjenigen von ΔF gleich setzt

$$-mk\Big[\overset{m}{a}\,.\,z$$

$$+\overset{m-1}{a}\left(z-k\,dz+\frac{k^2}{2}d^2z-\frac{k^3}{2\,.\,3}d^3z\ldots\pm\frac{k^m}{2.3\ldots m}d^mz\right)$$

$$+\overset{m-2}{a}\left(z-2kdz+\frac{2^2k^2}{2}d^2z-\frac{2^3k^3}{3\,.\,2}d^3z\ldots\pm\frac{2^mk^m}{2.3\ldots m}d^mz\right)$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$+\overset{0}{a}\left(z-mkdz+\frac{m^2k^2}{2}d^2z+\frac{m^3k^3}{2\,.\,3}d^3z\ldots\pm\frac{m^nk^m}{2.3\ldots m}d^mz\right)\Big]$$

$$=-mk\left(z+m\frac{k}{2}dz-\frac{m^2k^2}{2\,.\,3}d^2z\ldots\ldots\pm\frac{m^mk^m}{2.3\ldots m}d^mz\right)$$

und hieraus

343.

$$\overset{m}{a}+\overset{m-1}{a}+\overset{m-2}{a}\ldots\ldots\ldots+\overset{0}{a}=1$$

$$\overset{m-1}{a}+2\overset{m-2}{a}\ldots\ldots\ldots+m\overset{0}{a}=\frac{m}{2}$$

$$\overset{m-1}{a}+2^2\overset{m-2}{a}\ldots\ldots+m^2\overset{0}{a}=\frac{m^2}{3}$$

— — — — — — — — — — —

$$\overset{m-1}{a}+2^m\overset{m-2}{a}\ldots\ldots+m^m\overset{0}{a}=\frac{m^m}{m+1}$$

aus welchen Gleichungen also die Coefficienten ebenfalls gefunden werden können. Diese Gleichungen sind aber den obigen an Gestalt vollkommen gleich, und nur darin verschieden, daß hier der letzte Coefficient $\overset{m}{a}$ an der Stelle steht, wo sich dort der erste $\overset{0}{a}$ befindet, der vorletzte $\overset{m-1}{a}$ an der Stelle des zweiten $\overset{1}{a}$ dort ꝛc.

Entwickelte man also aus beiden Gruppen von Gleichungen (341. u. 342.) die Coefficienten wirklich, so müßte man nothwendig aus der letzten Gruppe für $\overset{m}{a}$, $\overset{m-1}{a}$, $\overset{m-2}{a}$ .... ganz dieselben Werthe finden, welche die erste für $\overset{0}{a}$, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$... giebt, woraus folgt, daß, wie behauptet wurde,

$$344. \quad \overset{0}{a} = \overset{m}{a}, \quad \overset{1}{a} = \overset{m-1}{a}, \quad \overset{2}{a} = \overset{m-2}{a} \; \ldots\ldots \text{ ist.}$$

194.

Es kommt nun auf die Entwickelung der einen Hälfte der Coefficienten aus einer der obigen Gruppen von Gleichungen (341. u. 342.) an. Die erste Gleichung beider Gruppen kann ganz aus der Rechnung bleiben, weil die übrigen Gleichungen den einen Coefficienten, der in der ersten Gleichung mehr vorkommt, alle nicht enthalten.

Es sey, um die Entwickelung durch ein Beispiel deutlicher zu machen, m = 6, so sollen also aus den Gleichungen

$$345. \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + 3\overset{3}{a} + 4\overset{4}{a} + 5\overset{5}{a} + 6\overset{6}{a} = \overset{1}{e} \\ \overset{1}{a} + 2^2\overset{2}{a} + 3^2\overset{3}{a} + 4^2\overset{4}{a} + 5^2\overset{5}{a} + 6^2\overset{6}{a} = \overset{2}{e} \\ \overset{1}{a} + 2^3\overset{2}{a} + 3^3\overset{3}{a} + 4^3\overset{4}{a} + 5^3\overset{5}{a} + 6^3\overset{6}{a} = \overset{3}{e} \\ \overset{1}{a} + 2^4\overset{2}{a} + 3^4\overset{3}{a} + 4^4\overset{4}{a} + 5^4\overset{5}{a} + 6^4\overset{6}{a} = \overset{4}{e} \\ \overset{1}{a} + 2^5\overset{2}{a} + 3^5\overset{3}{a} + 4^5\overset{4}{a} + 5^5\overset{5}{a} + 6^5\overset{6}{a} = \overset{5}{e} \\ \overset{1}{a} + 2^6\overset{2}{a} + 3^6\overset{3}{a} + 4^6\overset{4}{a} + 5^6\overset{5}{a} + 6^6\overset{6}{a} = \overset{6}{e} \end{array} \right.$$

welches die, auf die erste folgende Gleichungen der ersten Gruppe sind, wenn man

$$\frac{m}{2} = \overset{1}{e}, \quad \frac{m^2}{3} = \overset{2}{e}, \quad \frac{m^3}{4} = \overset{3}{e} \ldots\ldots \frac{m^m}{m+1} = \overset{m}{e}$$

setzt, die 6 Größen $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, $\overset{4}{a}$, $\overset{5}{a}$, $\overset{6}{a}$ gefunden werden.

Man ziehe die zweite Gleichung von der ersten ab, die dritte von der zweiten u. s. w., so kommt

$$2\overset{2}{a} + 3 \cdot 2\overset{3}{a} + 4 \cdot 3\overset{4}{a} + 5 \cdot 4\overset{5}{a} + 6 \cdot 5\overset{6}{a} = \overset{2}{e} - \overset{1}{e}$$

$$2^2\overset{2}{a} + 3^2 \cdot 2\overset{3}{a} + 4^2 \cdot 3\overset{4}{a} + 5^2 \cdot 4\overset{5}{a} + 6^2 \cdot 5\overset{6}{a} = \overset{3}{e} - \overset{2}{e}$$

$$2^3\overset{2}{a} + 3^3 \cdot 2\overset{3}{a} + 4^3 \cdot 3\overset{4}{a} + 5^3 \cdot 4\overset{5}{a} + 6^3 \cdot 5\overset{6}{a} = \overset{4}{e} - \overset{3}{e}$$

$$2^4\overset{2}{a} + 3^4 \cdot 2\overset{3}{a} + 4^4 \cdot 3\overset{4}{a} + 5^4 \cdot 4\overset{5}{a} + 6^4 \cdot 5\overset{6}{a} = \overset{5}{e} - \overset{4}{e}$$

$$2^5\overset{2}{a} + 3^5 \cdot 2\overset{3}{a} + 4^5 \cdot 3\overset{4}{a} + 5^5 \cdot 4\overset{5}{a} + 6^5 \cdot 5\overset{6}{a} = \overset{6}{e} - \overset{5}{e}$$

Man multiplicire jede dieser Gleichungen mit 2 und ziehe sie von der auf sie nächstfolgenden ab, so kommt

$$3 \cdot 2\overset{3}{a} + 4 \cdot 3 \cdot 2\overset{4}{a} + 5 \cdot 4 \cdot 3\overset{5}{a} + 6 \cdot 5 \cdot 4\overset{6}{a} = \overset{3}{e} - 3\overset{2}{e} + 2\overset{1}{e}$$

$$3^2 \cdot 2\overset{3}{a} + 4^2 \cdot 3 \cdot 2\overset{4}{a} + 5^2 \cdot 4 \cdot 3\overset{5}{a} + 6^2 \cdot 5 \cdot 4\overset{6}{a} = \overset{4}{e} - 3\overset{3}{e} + 2\overset{2}{e}$$

$$3^3 \cdot 2\overset{3}{a} + 4^3 \cdot 3 \cdot 2\overset{4}{a} + 5^3 \cdot 4 \cdot 3\overset{5}{a} + 6^3 \cdot 5 \cdot 4\overset{6}{a} = \overset{5}{e} - 3\overset{4}{e} + 2\overset{3}{e}$$

$$3^4 \cdot 2\overset{3}{a} + 4^4 \cdot 3 \cdot 2\overset{4}{a} + 5^4 \cdot 4 \cdot 3\overset{5}{a} + 6^4 \cdot 5 \cdot 4\overset{6}{a} = \overset{6}{e} - 3\overset{5}{a} + 2\overset{4}{e}$$

Man multiplicire jede dieser Gleichungen mit 3 und ziehe sie von der nächsten ab, so kommt

$$4 \cdot 3 \cdot 2\overset{4}{a} + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\overset{5}{a} + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3\overset{6}{a} = \overset{4}{e} - 6\overset{3}{e} + 11\overset{3}{e} - 6\overset{1}{e}$$

$$4^2 \cdot 3 \cdot 2\overset{4}{a} + 5^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\overset{5}{a} + 6^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3\overset{6}{a} = \overset{5}{e} - 6\overset{4}{e} + 11\overset{3}{e} - 6\overset{2}{e}$$

$$4^3 \cdot 3 \cdot 2\overset{4}{a} + 5^3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\overset{5}{a} + 6^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3\overset{6}{a} = \overset{6}{e} - 6\overset{5}{e} + 11\overset{4}{e} - 6\overset{3}{e}$$

Man multiplicire jede dieser Gleichungen mit 4 und ziehe sie von der nächsten ab, so kommt

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\overset{5}{a} + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\overset{6}{a} = \overset{5}{e} - 10\overset{4}{e} + 35\overset{3}{e} - 50\overset{2}{e} + 24\overset{1}{e}$$

$$5^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\overset{5}{a} + 6^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\overset{6}{a} = \overset{6}{e} - 10\overset{5}{e} + 35\overset{4}{e} - 50\overset{3}{e} + 24\overset{2}{e}$$

Endlich multiplicire man die erste Gleichung mit 5 und ziehe sie von der zweiten ab, so kommt

$$6.5.4.3.2\overset{6}{a} = \overset{6}{e} - 15\overset{5}{e} + 85\overset{4}{e} - 225\overset{3}{e} + 274\overset{2}{e} - 120\overset{1}{e},$$

woraus sich der letzte Coefficient $\overset{6}{a}$ unmittelbar findet.

Man setze $\overset{2}{e} - \overset{1}{e} = \overset{2}{\varepsilon}$

$$346.\ \left\{\begin{array}{l} \overset{3}{e} - 3\overset{2}{e} + 2\overset{1}{e} = \overset{3}{\varepsilon} \\ \overset{4}{e} - 6\overset{3}{e} + 11\overset{2}{e} - 6\overset{1}{e} = \overset{4}{\varepsilon} \\ \overset{5}{e} - 10\overset{4}{e} + 35\overset{3}{e} - 50\overset{2}{e} + 24\overset{1}{e} = \overset{5}{\varepsilon} \\ \overset{6}{e} - 15\overset{5}{e} + 85\overset{4}{e} - 225\overset{3}{e} + 274\overset{2}{e} - 120\overset{1}{e} = \overset{6}{\varepsilon} \end{array}\right.$$

und bezeichne das Produkt $1.2.3\ldots\ldots m$ durch $\overline{m}$, so ist aus der ersten der verschiedenen hier gefundenen Gleichungen

$$\overline{6}\,\overset{6}{a} = \overset{6}{\varepsilon}$$

$$\overline{5}\,\overset{5}{a} + \overline{6}\,\overset{6}{a} = \overset{5}{\varepsilon}$$

$$\overline{4}\,\overset{4}{a} + \overline{5}\,\overset{5}{a} + \tfrac{1}{2}\,\overline{6}\,\overset{6}{a} = \overset{4}{\varepsilon}$$

$$\overline{3}\,\overset{3}{a} + \overline{4}\,\overset{4}{a} + \tfrac{1}{2}\,\overline{5}\,\overset{5}{a} + \frac{1}{2.3}\,\overline{6}\,\overset{6}{a} = \overset{3}{\varepsilon}$$

$$\overline{2}\,\overset{2}{a} + \overline{3}\,\overset{3}{a} + \tfrac{1}{2}\,\overline{4}\,\overset{4}{a} + \frac{1}{2.3}\,\overline{5}\,\overset{5}{a} + \frac{1}{2.3.4}\,\overline{6}\,\overset{6}{a} = \overset{2}{\varepsilon}$$

$$\overline{1}\,\overset{1}{a} + \overline{2}\,\overset{2}{a} + \tfrac{1}{2}\,\overline{3}\,\overset{3}{a} + \frac{1}{2.3}\,\overline{4}\,\overset{4}{a} + \frac{1}{2.3.4}\,\overline{5}\,\overset{5}{a} + \frac{1}{2.3.4.5}\,\overline{6}\,\overset{6}{a} = \overset{1}{\varepsilon}$$

Daraus findet man

$$\overline{6}\,\overset{6}{a} = \overset{6}{\varepsilon}$$

$$\overline{5}\,\overset{5}{a} = \overset{5}{\varepsilon} - \overset{6}{\varepsilon}$$

$$\overset{_4}{4}\,a = \overset{4}{\varepsilon} - (\overset{5}{\varepsilon} - \overset{6}{\varepsilon}) - \tfrac{1}{2}\overset{6}{\varepsilon} = \overset{4}{\varepsilon} - \overset{5}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{6}{\varepsilon}$$

$$\overset{_3}{3}\,a = \overset{3}{\varepsilon} - (\overset{4}{\varepsilon} - \overset{5}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{6}{\varepsilon}) - \tfrac{1}{2}(\overset{5}{\varepsilon} - \overset{6}{\varepsilon}) - \frac{1}{2.3}\overset{6}{\varepsilon}$$

$$= \overset{3}{\varepsilon} - \overset{4}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{5}{\varepsilon} - \frac{1}{2.3}\overset{6}{\varepsilon}$$

$$\overset{_2}{2}\,a = \overset{2}{\varepsilon} - \left(\overset{3}{\varepsilon} - \overset{4}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{5}{\varepsilon} - \frac{1}{2.3}\overset{6}{\varepsilon}\right) - \tfrac{1}{2}(\overset{4}{\varepsilon} - \overset{5}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{6}{\varepsilon}) - \frac{1}{2.3}(\overset{5}{\varepsilon} - \overset{6}{\varepsilon})$$

$$- \frac{1}{2.3.4}\overset{6}{\varepsilon}$$

$$= \overset{2}{\varepsilon} - \overset{3}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{4}{\varepsilon} - \frac{1}{2.3}\overset{5}{\varepsilon} + \frac{1}{2.3.4}\overset{6}{\varepsilon}$$

$$\overset{_1}{1}\,a = \tfrac{1}{2} - \left(\overset{2}{\varepsilon} - \overset{3}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{4}{\varepsilon} - \frac{1}{2.3}\overset{5}{\varepsilon} + \frac{1}{2.3.4}\overset{6}{\varepsilon}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\overset{3}{\varepsilon} - \overset{4}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{5}{\varepsilon} - \frac{1}{2.3}\overset{6}{\varepsilon}\right)$$

$$- \frac{1}{2.3}(\overset{4}{\varepsilon} - \overset{5}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{6}{\varepsilon}) - \frac{1}{2.3.4}(\overset{5}{\varepsilon} - \overset{6}{e}) - \frac{1}{2.3.4.5}\overset{6}{\varepsilon}$$

$$= \overset{1}{\varepsilon} - \overset{2}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\overset{3}{\varepsilon} - \frac{1}{2.3}\overset{4}{\varepsilon} + \frac{1}{2.3.4}\overset{5}{\varepsilon} - \frac{1}{2.3.4.5}\overset{6}{\varepsilon}\ ^{*)}$$

*) Das Resultat dieser Elimination ist sehr merkwürdig. Es folgt daraus, daß, wenn

$$\begin{aligned} a &= \alpha \\ b + a &= \beta \\ c + b + \tfrac{1}{2}a &= \gamma \\ d + c + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2.3}a &= \delta \\ e + d + \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2.3}b + \tfrac{1}{2.3.4}a &= \varepsilon \end{aligned}$$ ꝛc. ist,

umgekehrt

$$\begin{aligned} \alpha &= a \\ \beta - \alpha &= b \\ \gamma - \beta + \tfrac{1}{2}\alpha &= c \\ \delta - \gamma + \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2.3}\alpha &= d \\ \varepsilon - \delta + \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2.3}\beta + \tfrac{1}{2.3.4}\alpha &= e \end{aligned}$$ ꝛc. ist.

Hieraus aber findet man unmittelbar die gesuchten Coëfficienten, nämlich

$$347. \quad \begin{cases} \overset{6}{a} = \frac{1}{6}\overset{6}{\varepsilon} \\ \overset{5}{a} = \frac{1}{5}(\overset{5}{\varepsilon} - \overset{6}{\varepsilon}) \\ \overset{4}{a} = \frac{1}{4}(\overset{4}{\varepsilon} - \overset{5}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\overset{6}{\varepsilon}) \\ \overset{3}{a} = \frac{1}{3}\left(\overset{3}{\varepsilon} - \overset{4}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\overset{5}{\varepsilon} - \frac{1}{2 \cdot 3}\overset{6}{\varepsilon}\right) \\ \overset{2}{a} = \frac{1}{2}\left(\overset{2}{\varepsilon} - \overset{3}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\overset{4}{\varepsilon} - \frac{1}{2 \cdot 3}\overset{5}{\varepsilon} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\overset{6}{\varepsilon}\right) \\ \overset{1}{a} = \frac{1}{1}\left(\overset{1}{\varepsilon} - \overset{2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\overset{3}{\varepsilon} - \frac{1}{2 \cdot 3}\overset{4}{\varepsilon} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\overset{5}{\varepsilon} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\overset{6}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

welches die verlangten Coëfficienten sind. Das Gesetz der Fortschreitung ist klar. Der Werth der Größen $\overset{1}{\varepsilon}, \overset{2}{\varepsilon}, \overset{3}{\varepsilon} \ldots$ ist oben angegeben.

195.

Um als Beispiel für einen einzelnen Fall die Coefficienten in Zahlen zu berechnen, möge das angenommene Beispiel $m = 6$ ausgeführt werden. Hier ist

$$\overset{1}{e} = \frac{m}{2} = 3, \quad \overset{2}{e} = \frac{m^2}{3} = 12, \quad \overset{3}{e} = \frac{m^3}{4} = 54,$$

$$\overset{4}{e} = \frac{m^4}{5} = \frac{1296}{5}, \quad \overset{5}{e} = \frac{m^5}{6} = 1296, \quad \overset{6}{e} = \frac{46656}{7},$$

also ist

$$\overset{1}{\varepsilon} = 3$$

$$\overset{2}{\varepsilon} = 12 - 3 = 9$$

$$\overset{3}{\varepsilon} = 54 - 3 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 24$$

$$\overset{4}{\varepsilon}=\frac{1296}{5}-6.54+11.12-6.3=\frac{246}{5}$$

$$\overset{5}{\varepsilon}=1296-10.\frac{1296}{5}+35.54-50.12+24.3=66$$

$$\overset{6}{\varepsilon}=\frac{46656}{7}-15.1296+85.\frac{1296}{5}-225.54+274.12-120.3$$

$$=+\frac{246}{7}$$

Ferner ist $\overline{1}=1$, $\overline{2}=2$, $\overline{3}=6$, $\overline{4}=24$, $\overline{5}=120$, $\overline{6}=720$, also ist

$$\overset{6}{a}=\frac{41}{840}$$

$$\overset{5}{a}=\frac{1}{120}\left(66-\frac{246}{7}\right)=\frac{216}{840}$$

$$\overset{4}{a}=\frac{1}{24}\left(\frac{246}{5}-66+\tfrac{1}{2}\frac{246}{7}\right)=\frac{27}{840}$$

$$\overset{3}{a}=\frac{1}{6}\left(24-\frac{246}{5}+33-\frac{41}{7}\right)=\frac{272}{840}$$

$$\overset{2}{a}=\frac{1}{2}\left(9-24+\frac{123}{5}-11+\frac{41}{28}\right)=\frac{27}{840}$$

$$\overset{1}{a}=1\left(3-9+\frac{1}{2}.24-\frac{1}{6}.\frac{246}{5}+\frac{1}{24}.66-\frac{41}{40}\right)=\frac{216}{840}$$

$$\overset{0}{a}=1-\overset{1}{a}-\overset{2}{a}-\overset{3}{a}-\overset{4}{a}-\overset{5}{a}-\overset{6}{a}=\frac{41}{840}$$

Es ist folglich $\overset{0}{a}=\overset{6}{a}$, $\overset{1}{a}=\overset{5}{a}$, $\overset{2}{a}=\overset{4}{a}$, wie gehörig. Also ist die Fläche der gegebenen Curve nach der Formel
$mk(\overset{0}{a}\overset{0}{\alpha}+\overset{1}{a}\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{a}\overset{2}{\alpha}+\overset{3}{a}\overset{3}{\alpha}+\overset{4}{a}\overset{4}{\alpha}+\overset{5}{a}\overset{5}{\alpha}+\overset{6}{a}\overset{6}{\alpha}$ (339.)

$$F=6k\left(\frac{41}{840}(\alpha+\overline{\iota})+\frac{216}{840}(\beta+\zeta)+\frac{27}{840}(\gamma+\varepsilon)+\frac{272}{840}\delta\right)$$

oder wenn man die ganze Abscisse $6k=1$ setzt

347. $840F=41(\alpha+\overline{\iota})+216(\beta+\zeta)+27(\gamma+\varepsilon)+272\delta.$

Dieses stimmt genau mit den Rechnungen von Cotes, Kramp und Bérard für den Fall $m=6$ überein.

196.

Verlangt man z. B. durch die eben gefundene Formel den natürlichen Logarithmen von 2, so ist die Fläche der zu quadrirenden Curve der natürliche Logarithme z. B. $\log(1+x)$, folglich sind die Ordinaten dieser Fläche $y=\frac{1}{1+x}$. Für $x=0$ aber ist diese Fläche $=0$, weil $\log 1=0$, also ist die Fläche $=\log 2$ für $x=1$, mithin muß man der Reihe nach $x=\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6}$ setzen, welches vermöge der Gleichung $y=\frac{1}{1+x}$, $\alpha=\frac{6}{6}$, $\beta=\frac{6}{7}$, $\gamma=\frac{6}{8}$, $\delta=\frac{6}{9}$, $\varepsilon=\frac{6}{10}$, $\zeta=\frac{6}{11}$, $\bar{\imath}=\frac{6}{12}$ giebt. Setzt man diese Zahlen für $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ in die obige Formel (347.), so erhält man

F oder $\log 2=0{,}6931480622\ldots$ Der wahre Werth von $\log 2$ ist $=0{,}6931471805\ldots$

Also ist das Resultat der Formel bis zur sechsten Decimalstelle genau.

197.

Da die Coefficienten nach den hiesigen Rechnungen mit den Cotesischen, von Kramp und Bérard hernach weiter berechneten, übereinstimmen, so ist hier der Ort, dieselben mitzutheilen. Ich setze, wie gesagt, sie für Diejenigen her, welche die Annalen der Mathematik nicht besitzen. (Fig. 35.) Die ganze Absciſſe AG ist in diesen Ausdrücken allemal $=1$. Die Zahl der gleichen Theile AB, BC rc., in welche sie getheilt ist, nicht der Ordinate, welche um 1 größer ist, giebt der Zeiger über dem Zeichen der Ordinate an, auch ist diese Zahl noch über dem Buchstaben F, der die Fläche AA′G′G bedeutet, angemerkt.

Die gegebenen Ordinaten sind $AA' = \overset{0}{\alpha}$, $BB' = \overset{1}{\alpha}$, $CC' = \overset{2}{\alpha}$ ꝛc. Auf diese Weise ist

348.

$$2\overset{1}{F} = \overset{0}{a} + \overset{1}{a}$$

$$6\overset{2}{F} = (\overset{0}{a} + \overset{2}{a}) + 4\overset{1}{a}$$

$$8\overset{3}{F} = (\overset{0}{a} + \overset{3}{a}) + 3(\overset{1}{a} + \overset{2}{a})$$

$$90\overset{4}{F} = 7(\overset{0}{a} + \overset{4}{a}) + 32(\overset{1}{a} + \overset{3}{a})\ 12\overset{2}{a}$$

$$288\overset{5}{F} = 19(\overset{0}{a} + \overset{5}{a}) + 75(\overset{1}{a} + \overset{4}{a}) + 50(\overset{2}{a} + \overset{3}{a})$$

$$840\overset{6}{F} = 41(\overset{0}{a} + \overset{6}{a}) + 216(\overset{1}{a} + \overset{5}{a}) + 27(\overset{2}{a} + \overset{4}{a}) + 272\overset{3}{a}$$

$$17280\overset{7}{F} = 751(\overset{0}{a} + \overset{7}{a}) + 3577(\overset{1}{a} + \overset{6}{a}) + 1323(\overset{2}{a} + \overset{5}{a}) + 2989(\overset{3}{a} + \overset{4}{a})$$

$$28350\overset{8}{F} = 989(\overset{0}{a} + \overset{8}{a}) + 5888(\overset{1}{a} + \overset{7}{a}) - 928(\overset{2}{a} + \overset{6}{a}) + 10496(\overset{3}{a} + \overset{5}{a}) - 4540\overset{4}{a}$$

$$89600\overset{9}{F} = 2857(\overset{0}{a} + \overset{9}{a}) + 15741(\overset{1}{a} + \overset{8}{a}) + 1080(\overset{2}{a} + \overset{7}{a}) + 19344(\overset{3}{a} + \overset{6}{a}) + 5778(\overset{4}{a} + \overset{5}{a})$$

$$598752\overset{10}{F} = 16067(\overset{0}{a} + \overset{10}{a}) + 106300(\overset{1}{a} + \overset{9}{a}) - 48525(\overset{2}{a} + \overset{8}{a}) + 272400(\overset{3}{a} + \overset{7}{a}) - 260550(\overset{4}{a} + \overset{6}{a}) + 427368\overset{5}{a}$$

$$87091200\overset{11}{F} = 2171465(\overset{0}{a} + \overset{11}{a}) + 13486539(\overset{1}{a} + \overset{10}{a}) - 3237113(\overset{2}{a} + \overset{9}{a}) + 25226685(\overset{3}{a} + \overset{8}{a}) - 9595542(\overset{4}{a} + \overset{7}{a}) + 15493566(\overset{5}{a} + \overset{6}{a})$$

$$63063000\overset{12}{F} = 1364651(\overset{0}{a} + \overset{12}{a}) + 9903168(\overset{1}{a} + \overset{11}{a}) - 7587864(\overset{2}{a} + \overset{10}{a}) + 35725120(\overset{3}{a} + \overset{9}{a})$$

$$
\begin{aligned}
& -51491295\,(\overset{4}{a}+\overset{8}{a}) + 87516288\,(\overset{5}{a}+\overset{7}{a}) \\
& -87797136\,\overset{6}{a} \\
369308773596262500\,\overset{24}{F} = {} & 352009697351900093\,(\overset{0}{a}+\overset{24}{a}) \\
& +3792703882616110008\,(\overset{1}{a}+\overset{23}{a}) \\
& -10434449556532091 52\,(\overset{2}{a}+\overset{22}{a}) + 59852599993685550 08\,(\overset{3}{a}+\overset{21}{a}) \\
& -23348698048773157032\,(\overset{4}{a}+\overset{20}{a}) + 78144929815004656128\,(\overset{5}{a}+\overset{19}{a}) \\
& -215016221369057252032\,(\overset{6}{a}+\overset{18}{a}) + 499068087287186884608\,(\overset{7}{a}+\overset{17}{a}) \\
& -981114320530281465657\,(\overset{8}{a}+\overset{16}{a}) + 1649142126612730224128\,(\overset{9}{a}+\overset{15}{a}) \\
& -2380252128837057960192\,(\overset{10}{a}+\overset{14}{a}) + 2962867290268854786048\,(\overset{11}{a}+\overset{13}{a}) \\
& -3186001615464675100912\,\overset{12}{a}
\end{aligned}
$$

Herr Bérard bemerkt, die Formel für $\overset{12}{F}$ gebe etwa 10 Decimal-Stellen genau, diejenige für $\overset{24}{F}$ 16 bis 18 Decimal-Stellen. Meines Erachtens wird man selten die Formel für $\overset{24}{F}$, und noch weniger eine Formel für noch mehrere Abscissen-Theile wegen der ungeheuer großen Coefficienten mit Vortheil gebrauchen. Leichter schon und ohne vielleicht eben so viel von der Schärfe der Rechnung zu verlieren, würde man die zu quadrirende Fläche stückweise berechnen, z. B. dieselbe erst in 3 Theile statt sogleich in 24 Theile theilen, und dann jeden Theil einzeln nach der Formel für $\overset{8}{F}$ berechnen.

Besonders nützlich sind diese Formeln auch da, wo man nicht sowohl die Gleichung der zu quadrirenden Curve, als nur einzelne Ordinaten kennt. Dann dienen die Formeln statt der Interpolation.

198.

So gewiß übrigens, dem Anschein nach, die Uebereinstimmung des Resultats der Formeln mit dem wirklichen Werthe der gesuchten Größe ist, so muß man doch gewiß bei dem Gebrauch derselben äußerst vorsichtig seyn, weil sich die Formeln, im Fall die gegebene Curve irgend einen singulären Punkt in demjenigen Umfange der Abscisse hat, welchen die Formeln umfassen, ungemein von der Wahrheit entfernen können. Man sichert sich gegen diese Fehler selbst dadurch nicht, daß man die Abscisse nicht groß annimmt, sondern man muß nothwendig die Natur der gegebenen Curve, ehe man die Formeln gebraucht, vollständig untersuchen und sich überzeugen, daß in dem Umfange der gegebenen Abscisse nichts vorkommt, was eine bedeutende Abweichung von der Curve, die man an die Stelle der gegebenen setzt, hervorbringen könnte. Man denke nur an die oft seltsame Gestalt der Curven höherer Ordnung und an die beinahe plötzlichen Veränderungen ihrer Biegungen. Wie soll wohl z. B. ein Abspringen von einer Seite der Axe nach der andern, ein conjugirter Punkt, in welchem sich ein gegebenes Oval zusammenzieht, eine Asymptote u. s. w. mit einer Parabel verglichen werden? Läge aber in dem Umfange der gegebenen Abscisse z. B. eine Asymptote, so kann die wirkliche Fläche unendlich groß seyn, während die Formel vielleicht etwas sehr Geringes giebt. Trennen sich in dem Umfange der Abscisse Zweige der Linie, so kann die wirkliche Fläche unmöglich seyn, oder von der Fläche der gegebenen Curve nichts über der gegebenen Abscisse liegen, während die Formeln ein bestimmtes Maaß angeben u. s. w. Mit Sicherheit wendet man diese Formeln nur für eine solche Strecke der Abscisse an, innerhalb welcher die gegebene Curve sich durchaus regelmäßig und stetig krümmt. Die Formeln sind aber deshalb für Curven, die sich nicht durchweg stetig krümmen, keinesweges unbrauchbar. Man

darf sie nur auf einzelne Stücke der gegebenen Curve von einem singulären Punkt bis zum andern gebrauchen, und wo Asymptoten und dergleichen vorkommen, die Abscissen klein genug annehmen, so passen sie für jeden Fall. Die singulären Punkte aber muß man nothwendig vorher aufsuchen.

Bemerkungen über noch andere Methoden.

199.

Es giebt unstreitig noch viele andere Mittel, den Werth einer Stammgröße näherungsweise zu finden, selbst nach der Idee, auf welcher die Newton'schen, Cotesischen, Kramp'schen und Bérard'schen Methoden beruhen. Die Fläche einer Curve, nämlich von x bis x + k, wird allgemein ausgedrückt durch

$$\Delta F x = k y + \frac{k^2}{2} d y + \frac{k^3}{2.3} d^2 y \ldots.$$

wo im ersten Gliede die Ordinate y mit der Abscisse k, im zweiten die trigonometrische Tangente dy des Tangenten-Winkels mit $\frac{k^2}{2}$, im dritten Gliede $d^2 y$ mit $\frac{k^3}{2.3}$ u. s. w. multiplicirt ist. Nun wird nach der obigen Newton'schen Idee die Fläche einer Curve auf die Weise ausgedrückt, daß man ein Mittel mehrerer Ordinaten mit der Abscisse multiplicirt, welches sich also gleichsam auf das erste Glied des allgemeinen Ausdrucks bezieht. Man kann also auch den nähernden Ausdruck so einrichten, daß man nicht allein ein Mittel der Ordinaten mit der Abscisse, sondern zugleich ein Mittel der Tangenten der Winkel, welche die Linien an der Stelle der Ordinaten mit der Abscisse macht, etwa mit dem Quadrat der Abscisse multiplicirt, welches darauf hinauskommen würde, daß man annimmt, die gegebene und die angenommene neue, bequem zu quadrirende Curve sollen nicht allein eine gewisse Zahl von Ordinaten, sondern auch an diesen Ordinaten die Tangenten mit einander gemein haben. Etwas dieser Idee Aehnliches hat auch vielleicht schon Lambert vorgeschwebt, indem er bei seinen, oben erwähn-

ten, Untersuchungen über diesen Gegenstand, die Abscissen-Axe in eine Tangente legt. Dadurch nun würde sich die Form des nähernden Ausdrucks auf die beiden ersten Glieder des allgemeinen Ausdrucks der Fläche beziehen. Setzt man ferner, die neue Curve solle mit der gegebenen eine bestimmte Zahl Ordinaten, und an denselben zugleich die Tangenten und die Krümmungs-Kreise gemein haben, so würde die Gestalt der nähernden Formel den drei ersten Gliedern des allgemeinen Ausdrucks entsprechen u. s. w.

200.

Diese Uebereinstimmung der Tangenten-Winkel, der Krümmungs-Kreise u. s. w. ist nach der obigen dreizehnten Methode leicht in Rechnung zu bringen.

Soll z. B. eine neue Curve $m+1$ Ordinaten und zugleich die Tangente an diesen Ordinaten mit denen der gegebenen Curve gemein haben, und folglich, wenn die Ordinaten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a} \ldots \overset{m}{a}$; die Tangenten $b^0, b^1 \ldots b^m$ sind, die Fläche etwa durch

$$349. \left\{ \begin{array}{l} mk(\overset{0}{a}\overset{0}{\alpha} + \overset{1}{a}\overset{1}{\alpha} + \overset{2}{a}\overset{2}{\alpha} \ldots\ldots + \overset{m}{a}\overset{m}{\alpha}) \\ + mk^2(b^0\beta^0 + b^1\beta^1 + b^2\beta^2 \ldots\ldots + b^m\beta^m) \end{array} \right.$$

ausgedrückt werden, so kommt es nur darauf an, die gegebenen Ordinaten und die Tangenten in diesen Ausdruck der Fläche einzuführen.

Die erste Ordinate ist y,

die zweite Ordinate ist $y + k\,dy + \frac{k^2}{2} d^2y \ldots$

die dritte Ordinate ist $y + 2k\,dy + \frac{2k^2}{2} d^2y \ldots$

und so weiter.

Die erste Tangente ist dy,

die zweite Tangente ist $dy + kd^2y + \frac{k^2}{2}d^3y \ldots$

die dritte Tangente ist $dy + 2kd^2y + \frac{2^2k^2}{2}d^3y \ldots$

u. s. w.; also ist die Fläche

ΔFx oder $mk\left(y + \frac{mk}{2}dy + \frac{m^2k^2}{2\cdot 3}d^2y + \frac{m^3k^3}{2\cdot 3\cdot 4}d^3y \ldots\ldots\right)$

$$= mk\Big[\overset{0}{a}y$$

$$+ \overset{1}{a}\left(y + kdy + \frac{k^2}{2}d^2y + \frac{k^3}{2\cdot 3}d^3y \ldots\right)$$

$$+ \overset{2}{a}\left(y + 2kdy + \frac{2k^2}{2}d^2y + \frac{2^3k^3}{2\cdot 3}d^3y \ldots\right)$$

— — — — — — — — — — — —

$$+ b^0. \quad kdy$$

$$+ b^1\left(\quad kdy + k^2d^2y + \frac{k^3}{2}d^3y\right)$$

$$+ b^2\left(\quad kdy + 2k^2d^2y + \frac{2^2k^3}{2}d^3y\right)$$

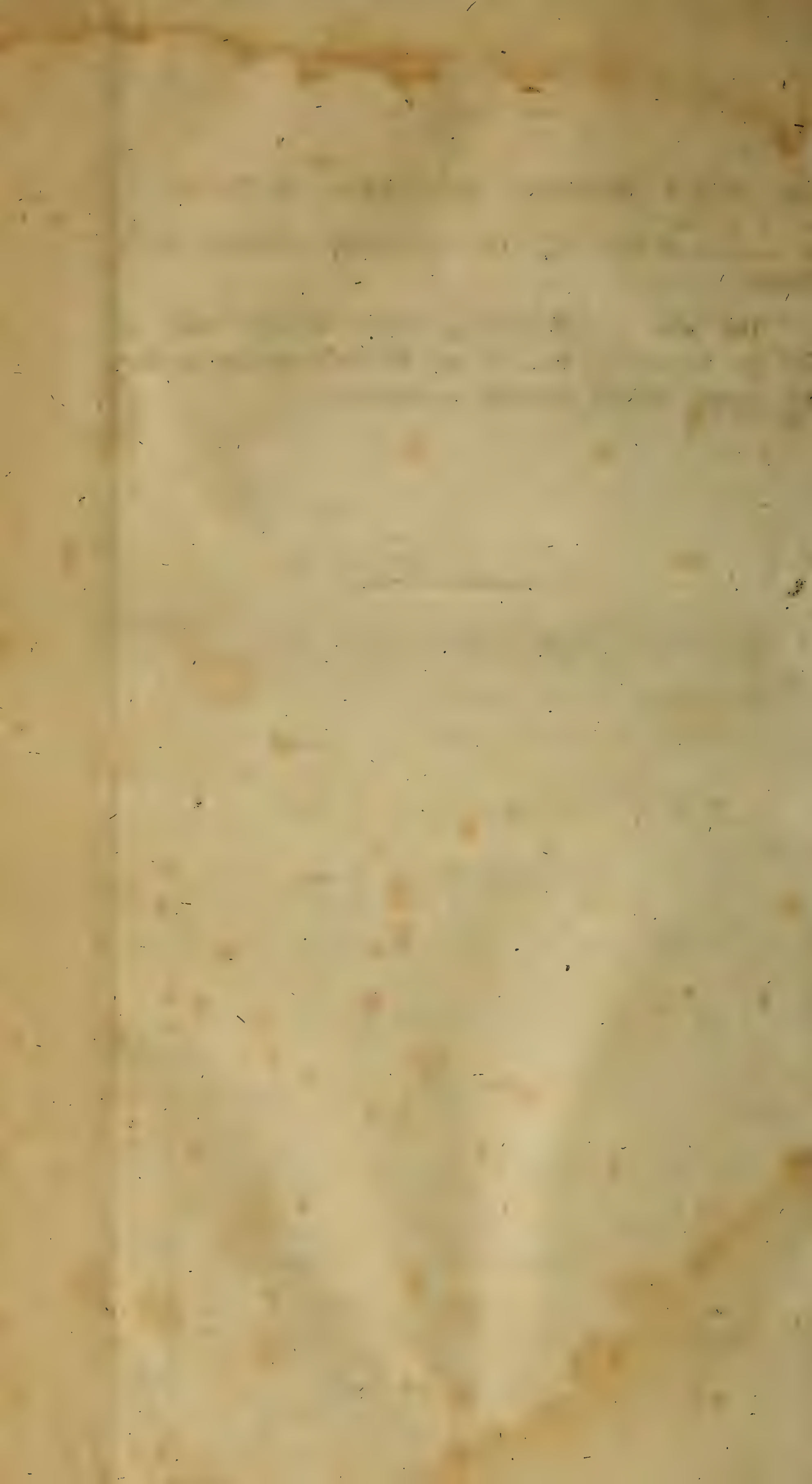
— — — — — — — — — — —]

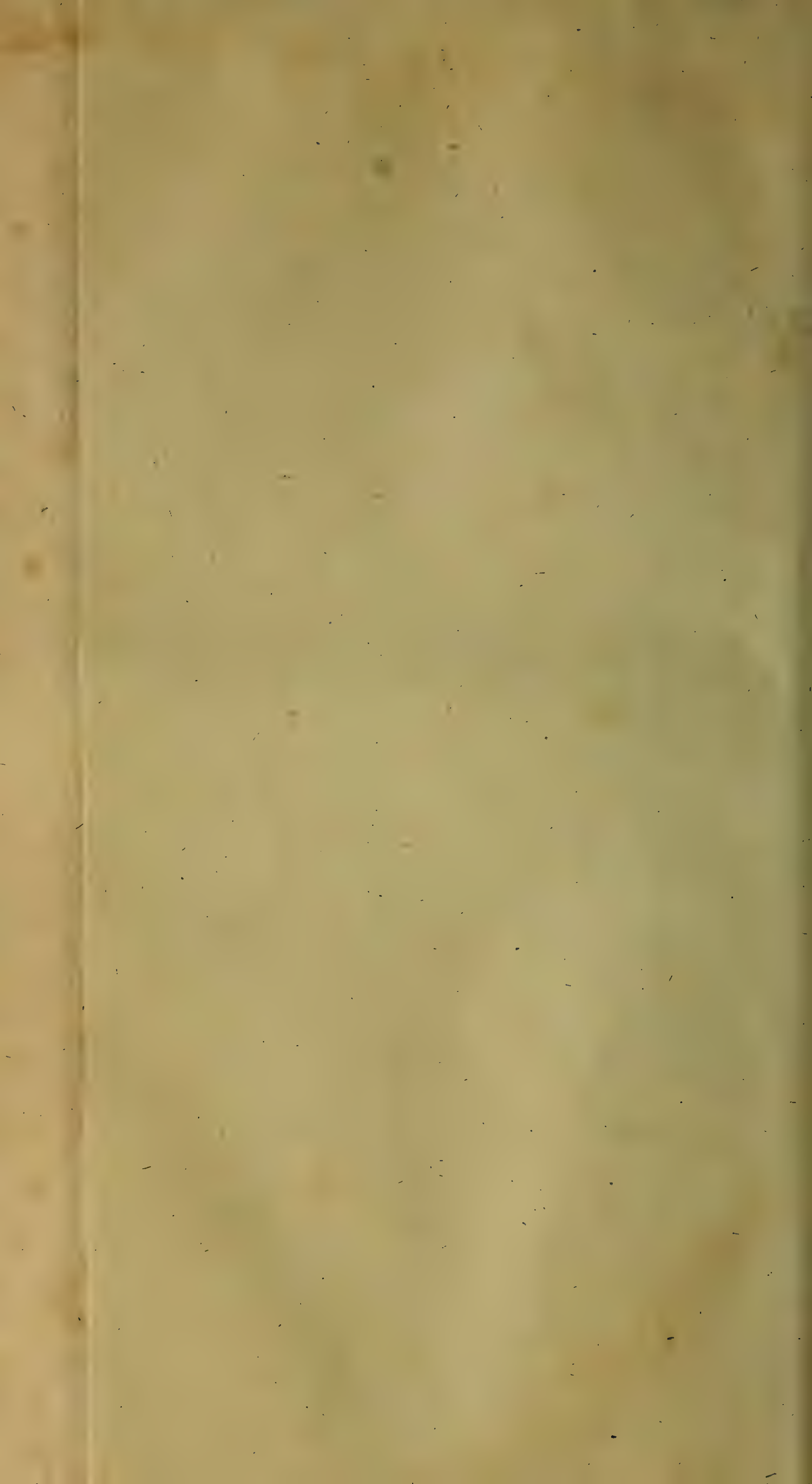
Hieraus folgt, wenn man die Coefficienten zu y, dy, $d^2y \ldots$ gleich setzt,

$$350.\begin{cases} \overset{0}{a} + \overset{1}{a} + \overset{2}{a} \ldots \overset{m}{a} = 1 \\ \overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} \ldots\ldots + m\overset{m}{a} + b^0 + b^1 + b^2 \ldots + b^m = \frac{m}{2} \\ \overset{1}{a} + 2^2\overset{2}{a} \ldots + m^2\overset{m}{a} + 2(b^1 + 2b^2 \ldots + m\,b^m) = \frac{m^2}{3} \\ \overset{1}{a} + 2^3\overset{2}{a} \ldots\ldots + m^3\overset{m}{a} + 3(b^1 + 2^2b^2 \ldots + m^2b^m) = \frac{m^3}{4} \\ \text{— — — — — — — — — —} \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen die gesuchten Coefficienten $\overset{0}{a}$, $\overset{1}{a} \ldots \overset{m}{a}$ und b^{0}, $b^{1} \ldots b^{m}$ gefunden werden können.

Um aber die Ausdehnung dieses Aufsatzes nicht zu sehr zu vergrößern, will ich mir die Fortsetzung dieser Untersuchungen für ein andermal vorbehalten.





11.

12.

13.

14.

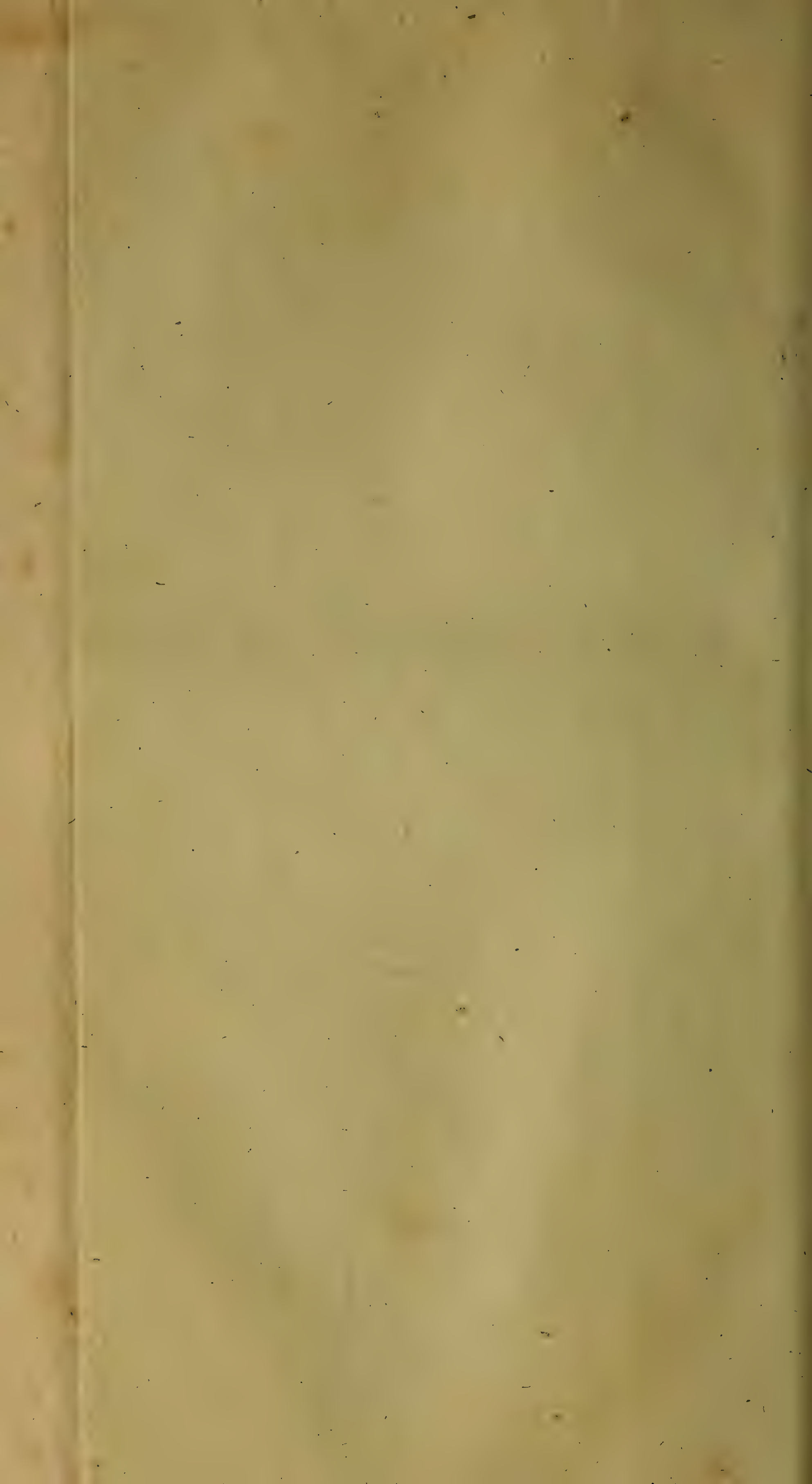
15.

16.

17.

18.

$AP = x$
$PM = y$
$PQ = k$



19. N S R M B C D P Q A

20. G C E B A D F

21. M C A B N D

22. N M A P Q K L

23. B Q C D a M y x P A

AP = x
PM = y
AC = a

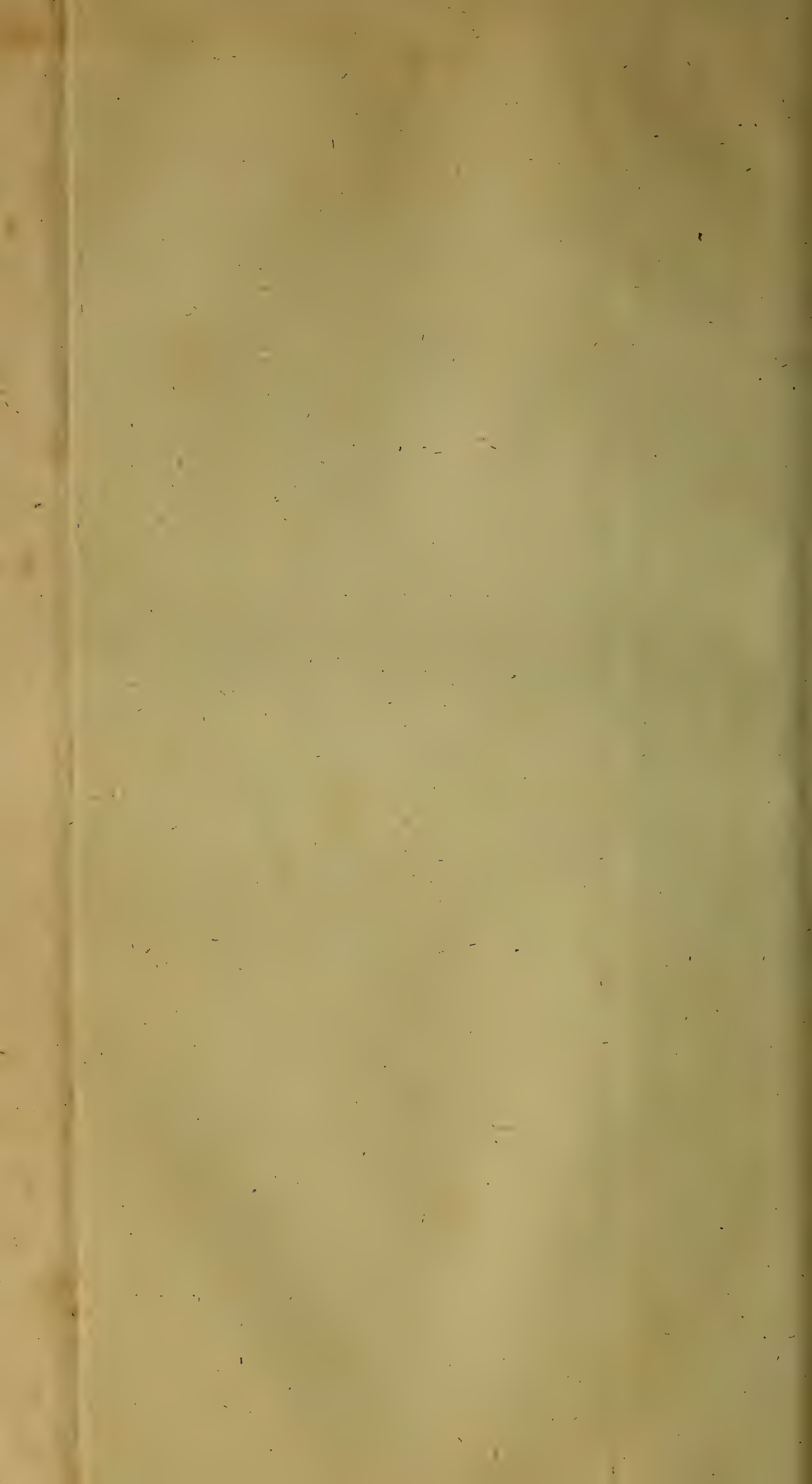
24. F H L B Q C D P M A E G

25. A P B x y M

AP = x
PM = y

26. A x M y P Q

AP = x
PM = y



27.

AP = x
PM = y
AB = a
EMP = α
PMB = β
FMD = γ

28.

AP = x
PM = y
AG = α
AD = b
AB = c
EMP = α
PMB = β
PMC = γ

29.

ED = GF = IC = SQ = a
AD = b
AP = x
PM = y
DF = z
DC = t
EAC = α
GFA = φ

30.

AB = a
BC = b
CD = c
DE = d
ABC = u
CDA = x

31.

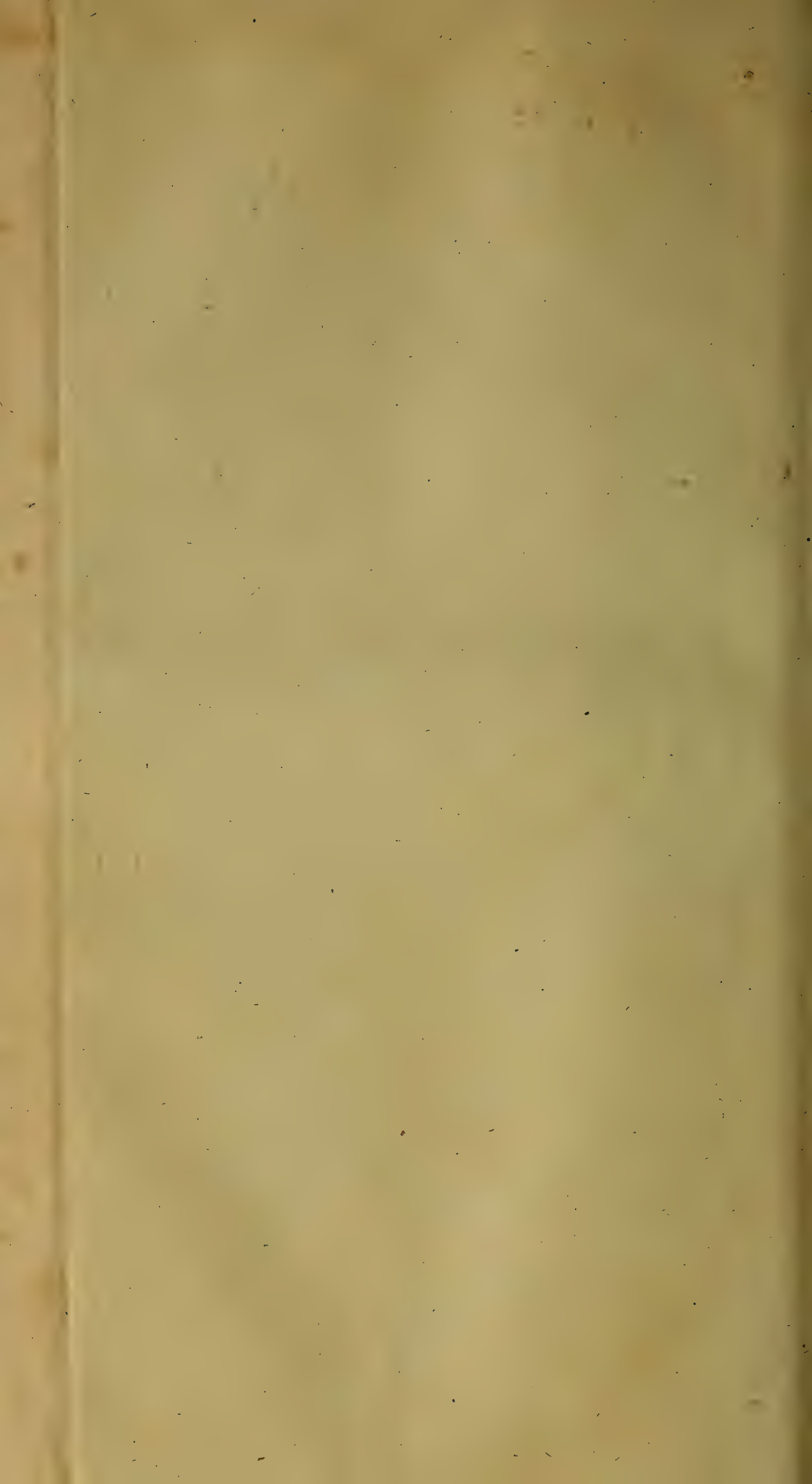
AE = a
AB = b
BC = c
CD = d
DE = e
EAB = u
ABC = x
CDE = y
R = Q = P = ρ

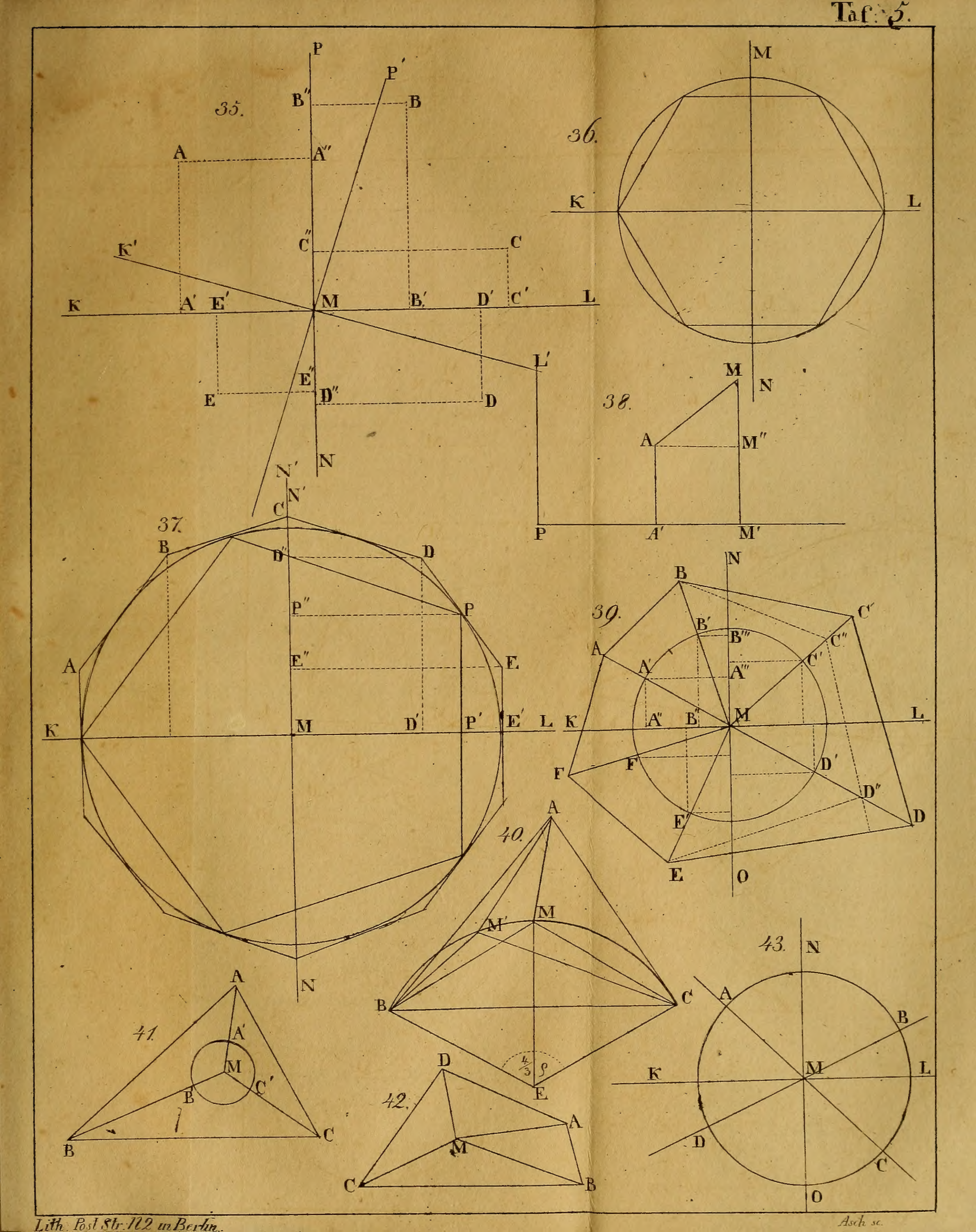
32.

AC = u
AD = x
DB = y
BC = z

33.

34.





Lith. Post Str. 112 in Berlin.
Asch sc.



